

**МЕТОД ТОЧЕЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ. I**

*Ю. И. Неймарк*

Настоящая работа представляет собой первую часть систематического изложения некоторых общих вопросов метода точечных отображений в применении к системам с произвольным числом степеней свободы. Как известно, метод точечных отображений был разработан и впервые эффективно применен к трудным задачам теории автоматического регулирования А. А. Андроновым и его сотрудниками.

Важность и роль, которую играет и призван еще сыграть этот метод в теории нелинейных колебаний и в теории нелинейных систем автоматического регулирования, побудили автора собрать воедино разрозненные в разных литературных источниках утверждения и дополнить их новыми результатами до некоторого законченного рассмотрения.

Публикуемая часть работы содержит рассмотрение задачи отыскания и исследования устойчивости неподвижных точек точечного преобразования и ее связи с вопросами отыскания и исследования устойчивости периодических движений и состояний равновесия.

В следующую часть войдет теория бифуркаций неподвижных точек, вопросы исследования зависимости периодических движений от параметров, метод малого параметра для точечных отображений и приложение метода точечных отображений к исследованию движений нелинейных систем, главным образом, кусочно-линейных.

**1. НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ**

Пусть с помощью формул

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \bar{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \bar{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{1.1}$$

каждая точка  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  некоторого геометрического образа  $\mathfrak{M}$  однозначно преобразуется в другую его точку  $\bar{M}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ . При этом  $x_1, x_2, \dots, x_n$  являются координатами точки  $M$ , а  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$  — координатами точки  $\bar{M}$ . В этом случае говорят, что формулы (1) определяют точечное преобразование геометрического образа  $\mathfrak{M}$  в себя.

Обозначим это преобразование буквой  $T$  и совокупность формул (1.1) кратко запишем в виде

$$\bar{M} = TM, \tag{1.1}$$

обозначающем, что преобразование  $T$  применяется к точке  $M$  и переводит ее в точку  $\bar{M}$ .

К точке  $\bar{M}$  в свою очередь может быть применено преобразование  $T$ , которое пусть преобразует ее в точку  $\bar{\bar{M}}$ . Точка  $\bar{\bar{M}}$  получается из точки  $M$  путем двукратного применения преобразования  $T$ , так что

$$\bar{\bar{M}} = T\bar{M} = T(TM).$$



Пусть  $M^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  неподвижная точка преобразования  $T$  и пусть некоторая непрерывная функция  $V$ , обращаясь в нуль в неподвижной точке  $M^*$ , такова, что в некоторой окрестности точки  $M^*$  разность

$$V(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - V(x_1, \dots, x_n) \quad (2.1)$$

знакоотрицательна, тогда неподвижная точка  $M^*$  преобразования  $T$  асимптотически устойчива в малом, если  $V$  знакоположительна в окрестности неподвижной точки, и, напротив, неустойчива, если функция  $V$  знакопеременна или знакоотрицательна.

В силу этой теоремы после того, как построена функция  $V$ , для которой разность (2.1), записываемая в виде

$$V(TM) - V(M) = V(\bar{M}) - V(M),$$

будет знакоотрицательной (такую функцию мы будем называть функцией Ляпунова), вопрос об устойчивости неподвижной точки сводится к тому, будет ли так построенная функция  $V$  знакоположительной или принимающей и отрицательные значения.

Существенно заметить, что в случае устойчивости с помощью функции Ляпунова  $V$  может быть установлен не только сам факт устойчивости, но и дана оценка области притяжения неподвижной точки. Так, например, в практически важном случае, когда функция  $V$  является однородной функцией переменных  $x_1 - x_1^*, \dots, x_n - x_n^*$ , можно утверждать, что если для всех точек  $M$ , удовлетворяющих условию  $V(M) \leq \varepsilon$  (исключая, конечно, точку  $M^*$ ), разность (2.1) отрицательная, то область  $V(M) \leq \varepsilon$  заведомо будет областью притяжения неподвижной точки  $M^*$ .

Перейдем к доказательству и геометрической интерпретации сделанного утверждения.

Пусть в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $M^*$  функция  $V$  положительна, а разность (2.1) отрицательна. Выберем настолько малые положительные числа  $\delta$  и  $\nu$ , чтобы множество (обозначим его  $V_\nu$ ) точек  $\varepsilon$ -окрестности  $M^*$ , для которых  $V \leq \nu$ , лежало строго внутри этой  $\varepsilon$ -окрестности и чтобы в свою очередь  $\delta$ -окрестность точки  $M^*$  лежала внутри  $V_\nu$ . Покажем теперь, что если точка  $M$  лежит в  $\delta$ -окрестности  $M^*$ , то и все ее последовательные преобразования  $TM, T^2M, \dots$  не покидают  $V_\nu$ -окрестности и стремятся к неподвижной точке  $M^*$ . Действительно, в силу условий теоремы последовательность положительных чисел  $V(M), V(TM), V(T^2M), \dots$  монотонно убывает. Поэтому во всех точках  $M, TM, T^2M, \dots$  функция  $V$  менее  $\nu$  и, следовательно, все они принадлежат  $V_\nu$ . Последовательность положительных чисел  $V(M), V(TM), V(T^2M), \dots$ , поскольку она монотонно убывает и ограничена снизу, имеет предел  $\alpha \geq 0$ . Если  $\alpha = 0$ , то точки  $M, TM, T^2M, \dots$  стремятся к точке  $M^*$ . С другой стороны, предположение  $\alpha > 0$  приводит к противоречию, так как из последовательности точек  $M, TM, T^2M, \dots$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $T^{j_1}M, T^{j_2}M, \dots$ , предельная точка  $N$  которой отлична от  $M^*$ , и затем, переходя в разности  $V(T^{j_k+1}M) - V(T^{j_k}M)$  к пределу, при  $k \rightarrow \infty$  найти, в противоположность посылкам теоремы, что  $V(TN) - V(N) = 0$ .

Пусть в замкнутой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $M^*$  функция  $V$  знакоотрицательна или знакопеременна, а разность (2.1) отрицательна. Возьмем в произвольной близости к неподвижной точке  $M^*$  точку  $M$ , для которой  $V(M) < 0$ . Нам нужно установить, что при некотором  $m$  точка  $T^m M$  лежит вне  $\varepsilon$ -окрестности  $M^*$ . Допустим противное и приходим к противоречию. Действительно, в силу условия теоремы последовательность чисел

$V(M)$ ,  $V(TM)$ ,  $V(T^2M)$ ,... монотонно убывает и, поскольку точки  $M$ ,  $TM$ ,  $T^2M$ ,... не покидают  $\varepsilon$ -окрестности  $M^*$ , ограничена снизу. Пусть  $\alpha$  предел этой последовательности и пусть  $T^{j_1}M$ ,  $T^{j_2}M$ ,  $T^{j_3}M$ ,... ее подпоследовательность, сходящаяся к некоторой точке  $N$ , лежащей в  $\varepsilon$ -окрестности  $M^*$ . Переходя в разности  $V(T^{j_{k+1}}M) - V(T^{j_k}M)$  к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , найдем, в противоречии с предположением теоремы, что  $V(TN) - V(N) = 0$ .

Сформулированный критерий устойчивости и неустойчивости допускает наглядную геометрическую интерпретацию, основанную на рассмотрении в пространстве переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  семейства поверхностей  $V = \text{const}$ .

В окрестности неподвижной точки  $M^*$  это семейство поверхностей  $V = c$ , в случае, когда  $V$  определено положительно, представляет собой

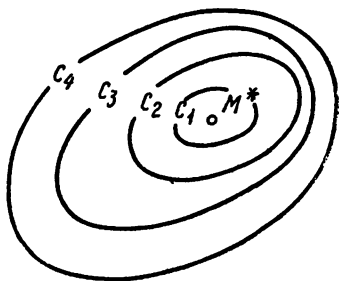


Рис. 1

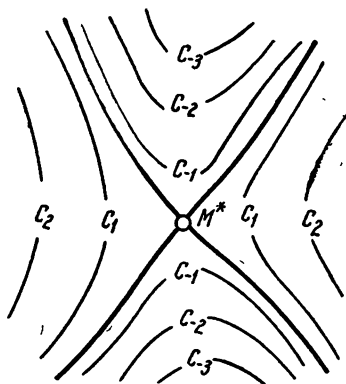


Рис. 2

ряд вложенных друг в друга замкнутых поверхностей, стягивающихся к точке  $M^*$  при  $c \rightarrow 0$  (рис. 1). При выполнении условий теоремы, точка  $M$ , лежащая на поверхности  $V = c$ , преобразуется в точку  $\bar{M}$ , лежащую на поверхности  $V = \bar{c}$ , расположенную внутри поверхности  $V = c$ , поскольку в силу условия теоремы  $c > \bar{c}$ . Таким образом, при положительности функции  $V$  последовательные преобразования точки  $M$ ,  $TM$ ,  $T^2M$ , ... располагаются на все более и более внутренних поверхностях  $V = \text{const}$  и неограниченно приближаются к точке  $M^*$ .

В случае, когда функция  $V$  знакопеременна, семейство поверхностей  $V = c$  имеет вид, показанный на рис. 2, где  $\dots < c_{-2} < c_{-1} < 0 = c_0, < c_1 < c_2 < \dots$ . Из этого рисунка видно, что у семейства поверхностей  $V = c_0, V = c_{-1}, V = c_{-2}, \dots$  каждая следующая поверхность лежит «вне» предыдущей, все удаляясь от неподвижной точки  $M^*$ . Точка  $M$ , лежащая на поверхности  $V = c < 0$ , преобразуется в точку, лежащую на более внешней поверхности  $V = \bar{c} < c$ . Это означает, что последовательные точки  $M$ ,  $TM$ ,  $T^2M$ ,... лежат на все более и более внешних поверхностях  $V = c$  и удаляются от неподвижной точки  $M^*$ .

### 3. КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА ТОЧЕЧНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Пусть точка  $M^*$  с координатами  $x_1^* = x_2^* = \dots = x_n^* = 0$  является неподвижной точкой преобразования (1.1), допускающего в окрестности точки  $M^*$  непрерывные производные первого и второго порядка. Разло-

жим правые части формул (1.1) в ряды Тейлора с остаточными членами второго порядка

$$\bar{x}_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0 x_1 + \dots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_0 x_n + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} x_1^2 + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_n^2} x_n^2, \dots \quad (3.1)$$

$$\bar{x}_n = \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)_0 x_1 + \dots + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)_0 x_n + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1^2} x_1^2 + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n^2} x_n^2.$$

Свободные члены в разложениях отсутствуют, поскольку формулы (3.1) точку  $M^*$  с нулевыми координатами должны переводить в себя. Волнистая линия над производными второго порядка означает, что они берутся при каких-то промежуточных значениях переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Выделяя в формулах (3.1) линейные члены, запишем их в виде

$$\bar{x}_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + \Omega_i(x_1, \dots, x_n) \quad (3.2)$$

$(i = 1, 2, 3, \dots, n),$

где  $a_{ij}$  — постоянные, равные  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_0$  соответственно, а  $\Omega_i$  — некоторые квадратичные формы от  $x_1, x_2, \dots, x_n$  с коэффициентами, зависящими от этих же переменных. В силу наличия непрерывных производных от  $f_i$  до второго порядка включительно, для остаточных членов  $\Omega_i$  в окрестности неподвижной точки  $M^*$  можно указать оценку

$$|\Omega_i(x_1, x_2, \dots, x_n)| < M(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2),$$

где  $M$  — некоторое постоянное число.

Из теории линейных преобразований известно, что путем линейной замены переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (в общем случае с комплексными коэффициентами) формулы преобразования (3.2) можно привести к виду:

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= \lambda_1 y_1 + S_1, \\ \bar{y}_2 &= \lambda_2 y_2 + S_2, \\ &\dots \\ \bar{y}_n &= \lambda_n y_n + S_n, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — корни характеристического полинома

$$\chi(z) = \begin{vmatrix} a_{11} - z, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - z, & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots & a_{nn} - z \end{vmatrix}. \quad (3.4)$$

Необходимо заметить, что представление в виде (3.3) заведомо возможно лишь в случае, если все корни полинома  $\chi(z)$  различные. При наличии равных корней запись в виде (3.3) может не иметь места. В этом особом случае следует прибегнуть к записи линейной части отображения (3.1) в так называемой нормальной форме, совпадающей с использованной нами выше диагональной формой в случае отсутствия кратных корней. При этом, например, при слиянии корней  $\lambda_1, \lambda_2$  и  $\lambda_3$  преоб-

разование (3.2) запишется либо опять в виде (3.3), либо в одном из видов:

$$\begin{aligned}\bar{y}_1 &= \lambda_1 y_1 + y_2 + y_3 + S_1, \\ \bar{y}_2 &= \lambda_1 y_2 + y_3 + S_2, \\ \bar{y}_3 &= \lambda_1 y_3 + S_3, \\ \bar{y}_i &= \lambda_i y_i + S_i \quad (i=4, 5, \dots, n).\end{aligned}\tag{3.3a}$$

$$\begin{aligned}\bar{y}_1 &= \lambda_1 y_1 + y_2 + S_1, \\ \bar{y}_2 &= \lambda_1 y_2 + S_2, \\ \bar{y}_3 &= \lambda_1 y_3 + S_3, \\ \bar{y}_i &= \lambda_i y_i + S_i \quad (i=4, 5, \dots, n).\end{aligned}\tag{3.36}$$

Запись преобразования  $T$  в окрестности неподвижной точки в виде (3.3) называется канонической [24, 25]. Заметим, что  $S_i$  так же, как и  $\mathcal{Q}$  являются квадратичными формами с переменными коэффициентами и для них имеет место оценка вида

$$|S_i(y_1, \dots, y_n)| < M(|y_1|^2 + \dots + |y_n|^2).\tag{3.5}$$

#### 4. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ТОЧЕЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ. ТЕОРЕМА О ЛИНЕАРИЗАЦИИ И СВЕДЕНИЕ ВОПРОСА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ К АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ О КОРНЯХ ПОЛИНОМА

Отбрасывание в записи точечного преобразования в виде (3.2) нелинейных членов  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \dots, \mathcal{Q}_n$  называется его линеаризацией. В результате линеаризации преобразование  $T$  превращается в линейное преобразование вида

$$\bar{x}_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \quad (i=1, 2, \dots, n).\tag{4.1}$$

Это линейное преобразование, согласно сказанному ранее, может быть приведено к каноническому виду

$$\bar{y}_i = \lambda_i y_i \quad (i=1, 2, \dots, n),\tag{4.2}$$

где числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  являются корнями полинома (3.4). Заметим, что среди корней  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  могут быть и комплексные. При этом наряду с комплексным корнем  $\lambda_k = \alpha + i\beta$  будет и ему сопряженный корень  $\lambda_s = \alpha - i\beta$ . Для дальнейшего важно иметь в виду, что соответствующие этим корням переменные  $y_k$  и  $y_s$  комплексно-сопряженные.

Рассмотрим теперь действительную квадратическую форму

$$V = \delta_1 y_1 y_1' + \delta_2 y_2 y_2' + \dots + \delta_n y_n y_n',\tag{4.3}$$

где штрих над переменной означает комплексно-сопряженную переменную, а  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  — какие-то пока неопределенные вещественные числа. Построим разность значений функций  $V$  для переменных  $y_1, y_2, \dots, y_n$  и преобразованных, согласно (4.2), значений  $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n$

$$\begin{aligned}V(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) - V(y_1, \dots, y_n) &= \delta_1(\lambda_1 \lambda_1' - 1) y_1 y_1' + \dots \\ &\dots + \delta_n(\lambda_n \lambda_n' - 1) y_n y_n' = \delta_1(|\lambda_1|^2 - 1)|y_1|^2 + \dots \\ &\dots + \delta_n(|\lambda_n|^2 - 1)|y_n|^2.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Если ни один из корней  $\lambda_i$  по модулю не равен единице, то знаки величин  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  можно выбрать так, чтобы при всех  $i$  выполнялось условие

$$\delta_i (|\lambda_i|^2 - 1) < 0 \quad (4.5)$$

и в силу этого функция  $V$  была функцией Ляпунова. Существенно, что найденная таким образом функция  $V$  будет функцией Ляпунова не только для линеаризованного преобразования (3.3), т. е. для преобразования (4.2), но и для исходного нелинеаризованного преобразования (3.3).

Действительно, составим разность (4.4) для исходного преобразования (3.3)

$$\begin{aligned} V(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) - V(y_1, y_2, \dots, y_n) = & \delta_1 (|\lambda_1|^2 - 1) |y_1|^2 + \dots \\ & \dots + \delta_n (|\lambda_n|^2 - 1) |y_n|^2 + 2\delta_1 \operatorname{Re}(\lambda_1 y_1 S_1') + \dots + 2\delta_n \operatorname{Re}(\lambda_n y_n S_n') + \\ & + \delta_1 |S_1|^2 + \dots + \delta_n |S_n|^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Согласно оценке (3.5), эту разность можно записать в виде

$$\delta_1 (|\lambda_1|^2 - 1) |y_1|^2 + \dots + \delta_n (|\lambda_n|^2 - 1) |y_n|^2 + S',$$

где для некоторого  $A < +\infty$

$$|S| < A(|y_1|^2 + \dots + |y_n|^2)^{3/2}. \quad (4.7)$$

С другой стороны, если обозначить через  $\sigma$

$$\min\{\delta_1(1 - |\lambda_1|^2), \dots, \delta_n(1 - |\lambda_n|^2)\},$$

то для разности (4.6), согласно (4.7), найдем оценку

$$\begin{aligned} V(TM) - V(M) < -\sigma(|y_1|^2 + \dots + |y_n|^2) + A(|y_1|^2 + \dots \\ & \dots + |y_n|^2)^{3/2}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

из которой непосредственно вытекает, что при любых  $y_1, y_2, \dots, \dots, y_n$ , одновременно не равных нулю и удовлетворяющих условию

$$|y_1|^2 + \dots + |y_n|^2 < \left(\frac{\sigma}{A}\right)^2,$$

разность (4.6) отрицательна.

Таким образом, мы установили, что исходное и линеаризованное точечные преобразования в случае, когда все корни  $\lambda_i$  по модулю отличны от единицы, имеют одинаковую функцию Ляпунова и, следовательно, одновременно оба устойчивы либо оба неустойчивы.

Функция Ляпунова  $V$  будет положительно-определенной, если все положительные, т. е. если все корни  $\lambda_i$  характеристического уравнения (3.4) по модулю меньше единицы, и будет принимать отрицательные значения, если хотя бы один корень  $\lambda_i$  имеет модуль, больший единицы. Таким образом, для асимптотической устойчивости неподвижной точки  $M^*$  достаточно, чтобы все корни  $\lambda_i$  лежали строго внутри единичного круга, и необходимо, чтобы ни один из этих корней не лежал вне его. Тем самым, задача об устойчивости неподвижной точки в малом сведена к чисто алгебраической задаче о расположении относительно единичного круга корней характеристического полинома (3.4), составленного по определенному правилу, исходя из формул (1.1) рассматриваемого точечного преобразования. Заметим, что с помощью построенной нами функции Ляпунова (4.3) можно получить в случае устойчивости неподвижной точки  $M^*$  оценку скорости приближения последовательных то-

чек  $M, TM, T^2M, \dots$  к неподвижной точке  $M^*$ . Действительно, в силу (4.8), для любого  $0 < \sigma' < \sigma$  можно указать настолько малую окрестность  $*$  неподвижной точки  $M^*$ , что для любой ее точки  $M$  имеет место

$$V(TM) - V(M) \leq -\sigma'(|y_1|^2 + \dots + |y_n|^2).$$

В случае устойчивости неподвижной точки  $M^*$  в качестве функции  $V$  можно взять  $|y_1|^2 + \dots + |y_n|^2$  и тогда

$$V(TM) \leq (1 - \sigma')V(M). \quad (4.9)$$

Из соотношения (4.9) непосредственно вытекает, что

$$V(T^m M) \leq (1 - \sigma')^m V(M), \quad (4.10)$$

и поэтому величина  $V = (y_1)^2 + \dots + (y_n)^2$  для последовательных преобразований  $TM, T^2M, \dots$  точки  $M$  убывает не медленнее, чем по геометрической прогрессии со знаменателем  $1 - \sigma'$ , который с приближением точки  $M$  к неподвижной точке  $M^*$  неограниченно приближается к величине  $1 - \sigma$ .

Если перейти от переменных  $y_1, y_2, \dots, y_n$  к исходным переменным  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , то из неравенства

$$A\rho(M, M^*) < V(M) < B\rho(M, M^*),$$

где  $A$  и  $B$  — некоторые положительные числа, и оценки (4.10) следует, что

$$\begin{aligned} \rho(T^m M, M^*) &< \frac{1}{A} V(T^m M) \leq \frac{(1 - \sigma')^m}{A} V(M) < \\ &< \frac{B}{A} (1 - \sigma')^m \rho(M, M^*), \end{aligned} \quad (4.11)$$

т. е. что расстояние от точки  $T^m M$  до неподвижной точки  $M^*$  убывает не медленнее, чем члены некоторой геометрической прогрессии со знаменателем  $1 - \sigma'$ , где  $\sigma - \sigma'$  — сколь угодно малая положительная фиксированная величина.

Только что сделанное нами рассмотрение предполагает, что возможна запись рассматриваемого точечного отображения в виде (3.3). Для того, чтобы убедиться, что и в особом случае, когда запись в виде (3.3) невозможна, остаются справедливыми сделанные нами выводы, покажем, как, например, для преобразования (3.3а) записать необходимую нам функцию Ляпунова  $V$ . Такой функцией, например, как показывает прямая проверка, будет

$$\begin{aligned} V = & \delta_1 \left\{ y_3 y_3' + \left( y_2 - \frac{1}{\lambda} y_3 \right) \left( y_2' - \frac{1}{\lambda_1} y_3' \right) + \right. \\ & + \left[ y_1 - \frac{1}{\lambda_1} y_2 - \frac{1}{\lambda_1} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_1} \right) y_3 \right] \left[ y_1' - \frac{1}{\lambda_1'} y_2' - \frac{1}{\lambda_1'} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_1'} \right) y_3' \right] \Big\} + \\ & + \sum_{i=1}^n \delta_i y_i y_i'. \end{aligned}$$

Описанный выше способ построения функции Ляпунова требует предварительного приведения точечного преобразования к каноническому виду. Можно указать следующий, довольно общий, способ построения функции Ляпунова, не требующий приведения к каноническому виду.

\* Если  $\sigma' = \sigma - A(|y_1|^2 + \dots + |y_n|^2)^{1/2}$ , то  $\varepsilon = \frac{\sigma - \sigma'}{A}$ .



Пусть  $V = \sum C_{ij} x_i x_j$  — некоторая квадратичная форма с неопределенными пока коэффициентами  $C_{ij}$ . Потребуем, чтобы разность

$$\sum C_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j - \sum C_{ij} x_i x_j$$

после подстановки вместо  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  их выражений через  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , согласно (4.1), совпала с заданной определенно-отрицательной квадратичной формой\*  $\Phi = \sum b_{ij} x_i x_j$ . Из линейной системы уравнений, выражающей это требование,

$$\sum_{s,k} C_{sk} a_{si} a_{kj} - C_{ij} = b_{ij}$$

находим неопределенные коэффициенты  $C_{sk}$  и тем самым и искомую функцию Ляпунова.

##### 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРЯМОЙ В ПРЯМОЮ. СОСТАВЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМАХ ЗАДАНИЯ ТОЧЕЧНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Прежде всего проиллюстрируем сформулированный выше критерий устойчивости неподвижной точки на простейшем случае преобразования прямой в прямую. Пусть координаты  $x$  и  $\bar{x}$  исходной и преобразованной точек  $M$  и  $\bar{M}$  некоторой прямой связаны соотношением

$$\bar{x} = f(x). \quad (5.1)$$

Неподвижные точки этого преобразования (5.1) найдутся из уравнения

$$x^* = f(x^*). \quad (5.2)$$

Для исследования устойчивости неподвижной точки  $M^*(x^*)$  нужно составить характеристическое уравнение, которое в данном случае будет

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x^*} - z = 0. \quad (5.3)$$

Устойчивость имеет место, если корень уравнения (5.3) по модулю меньше единицы, т. е. если

$$\left| \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x^*} \right| < 1, \quad (5.4)$$

и неустойчивость при обратном неравенстве.

В рассматриваемом простейшем случае точечного преобразования прямой в прямую связи между  $x$  и  $\bar{x}$ , определяемой формулой (5.1), можно дать важную и очень наглядную геометрическую интерпретацию. Эта геометрическая интерпретация, получившая наименование диаграммы Кенигса—Ламерея [28], состоит в указании некоторого геометрического способа получения по точке  $M$  точки  $\bar{M}$ . Этот способ состоит в том, что в прямоугольной системе координат строят график функции  $f(x)$  и пересекают его биссектрисой координатного угла. Для отыскания  $x$  по  $\bar{x}$  из точки  $\bar{M}(\bar{x})$  восстанавливают перпендикуляр до пересечения с графиком  $f(x)$ , затем из полученной точки проводят прямую, параллельную оси абсцисс, до пересечения с биссектрисой и, наконец, из найденной точки пересечения с биссектрисой опускают перпендикуляр на ось

\* В простейшем случае в качестве  $\Phi$  можно взять  $-x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$ .

абсцисс (рис. 3). Получаемая таким образом точка оси абсцисс и будет искомой точкой  $\bar{M}$  с координатой  $\bar{x}$ .

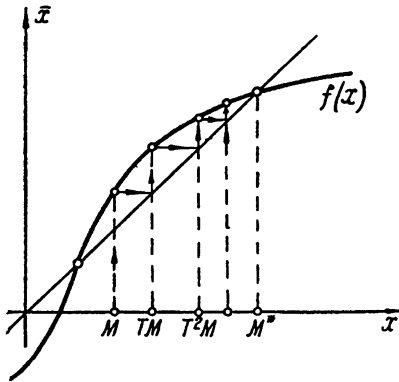


Рис. 3

Точки пересечения графика функции  $f(x)$  с биссектрисой являются неподвижными точками преобразования (5.1). Это явствует непосредственно как из описанного способа получения по точке  $M$  точки  $\bar{M}$ , так и из уравнения (5.2). Неподвижная точка будет устойчивой, если в этой точке тангенс угла наклона графика  $f(x)$  заключен между  $-1$  и  $+1$ . В этом случае последовательные преобразования точки  $M$ , находящейся в достаточной близости от неподвижной точки  $M^*$ , будут к ней асимптотически приближаться. Напротив, при тангенсе угла наклона, выходящем за пределы интервала  $(-1, +1)$ , последовательные преобразования точки  $M$  будут удаляться от неподвижной точки  $M^*$ .

При исследовании методом точечных отображений конкретных задач очень существенную роль играет так называемое параметрическое задание точечного преобразования\*.

В простейшем случае речь идет о задании связи между  $x$  и  $\bar{x}$  в виде

$$x = \varphi(u), \quad \bar{x} = \psi(u). \quad (5.5)$$

Здесь  $u$  является вспомогательной переменной, по исключению которой мы могли бы придти к искомой связи между  $x$  и  $\bar{x}$ . Однако такое исключение в ряде случаев практически очень трудно осуществимо и нецелесообразно. В более общем случае возникает запись точечного преобразования в виде

$$\varphi_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n; x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m) = 0 \quad (5.6)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n + m).$$

Наша задача сейчас состоит в указании способа составления характеристического полинома при задании преобразования в виде (5.6).

Пусть  $M^*$  ( $x_1^*, \dots, x_n^*$ ) неподвижная точка преобразования (5.6) и  $u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*$  соответствующие ей значения вспомогательных переменных  $u_1, u_2, \dots, u_m$ . В общем случае было бы безнадежным пытаться исключить вспомогательные переменные  $u_1, \dots, u_m$  в формулах (5.6) и затем разрешить их относительно  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и уже после этого провести линеаризацию и составление характеристического уравнения. Поэтому мы поступим иначе. Сначала линеаризуем уравнения (5.6) и лишь затем в той или иной форме проведем исключение лишних переменных и составление характеристического полинома. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, u_1, \dots, u_m$  значения переменных, удовлетворяющие уравнениям (5.6) и близкие к их значениям для рассматриваемой неподвижной точки. образуем разность

$$\varphi_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n; x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m) - \varphi_i(x_1^*, \dots, x_n^*; x_1^*, \dots, x_n^*; u_1^*, \dots, u_m^*) = 0,$$

которую после отбрасывания членов выше, чем первого порядка малости относительно величин  $\bar{\xi}_1 = \bar{x}_1 - x_1^*, \dots, \bar{\xi}_n = \bar{x}_n - x_n^*$ ,

\* Параметрическая форма точечного отображения впервые была использована в работах А. А. Андропова и его сотрудников [3—8].

$$\xi_1 = x_1 - x_1^*, \dots, \xi_n = x_n - x_n^*, v_1 = u_1 - u_1^*, \dots, v_m = u_m - u_m^*,$$

запишем в виде

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_1} \right)_* \bar{\xi}_1 + \dots + \left( \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_n} \right)_* \bar{\xi}_n + \left( \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_1} \right)_* \xi_1 + \dots \\ & \dots + \left( \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_n} \right)_* \xi_n + \left( \frac{\partial \varphi_l}{\partial u_1} \right)_* v_1 + \dots + \left( \frac{\partial \varphi_l}{\partial u_m} \right)_* v_m = 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где звездочки при производных означают, что они взяты при значениях переменных, соответствующих рассматриваемой неподвижной точке  $M^*$ . Для составления характеристического уравнения будем искать значения переменных  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  и  $v_1, v_2, \dots, v_m$ , при которых

$$\bar{\xi}_1 = z \xi_1, \bar{\xi}_2 = z \xi_2, \dots, \bar{\xi}_n = z \xi_n. \quad (5.8)$$

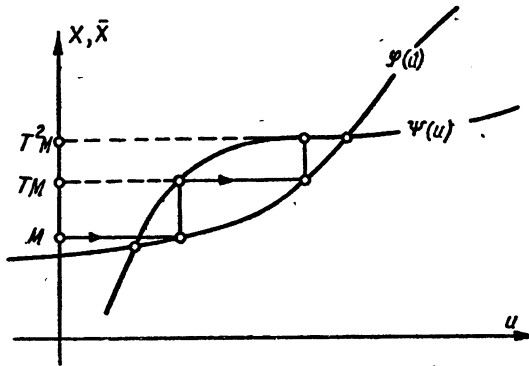


Рис. 4

После соответствующей подстановки в (5.7) приходим к системе  $n + m$  линейных однородных относительно  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, v_1, \dots, v_m$  уравнений. Исключая из этих уравнений переменные  $\xi_1, \dots, \xi_n, v_1, \dots, v_m$ , мы придем к искомому характеристическому уравнению для  $z$ . Как известно, результат этого исключения может быть записан в виде

$$\begin{vmatrix} \left( \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_1} \right)_* z + \left( \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_1} \right)_* & \dots & \left( \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_n} \right)_* z + \left( \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_n} \right)_* & \left( \frac{\partial \varphi_l}{\partial u_1} \right)_* & \dots & \left( \frac{\partial \varphi_l}{\partial u_m} \right)_* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left( \frac{\partial \varphi_{n+m}}{\partial x_1} \right)_* z + \left( \frac{\partial \varphi_{n+m}}{\partial x_1} \right)_* & \dots & \left( \frac{\partial \varphi_{n+m}}{\partial x_n} \right)_* z + \left( \frac{\partial \varphi_{n+m}}{\partial x_n} \right)_* & \left( \frac{\partial \varphi_{n+m}}{\partial u_1} \right)_* & \dots & \left( \frac{\partial \varphi_{n+m}}{\partial u_m} \right)_* \end{vmatrix} = 0. \quad (5.9)$$

Проиллюстрируем сказанное на простейшем примере точечного преобразования прямой в прямую, заданного в виде (5.5). При параметрическом задании преобразования прибегают к несколько другой геометрической интерпретации связи между  $x$  и  $\bar{x}$ . Именно, строят две кривые  $\bar{x} = \psi(u)$  и  $x = \varphi(u)$ , откладывая на оси абсцисс  $u$ , а оси ординат  $x$  и  $\bar{x}$  соответственно. После этого отыскание  $\bar{x}$  по заданному значению  $x$  осуществляется путем геометрического построения, изображенного на рис. 4. Точки пересечения построенных кривых определяют неподвижные точки



и рассматривать ее как автономную систему частного вида, для которой фазовым пространством является пространство переменных  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ . Причем в силу последнего уравнения системы (6.2)  $x_{n+1} = t$ .

Периодическому движению автономной или неавтономной системы в фазовом пространстве переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  соответствует замкнутая траектория. Время, за которое фазовая точка ее обегает, есть период этого периодического движения. При изображении движений в фазовом пространстве и времени периодическому движению будет соответствовать незамкнутая кривая, у которой значения фазовых переменных  $x_1, x_2, \dots$

$x_n$  периодически повторяются через некоторое время  $\tau$ . Для автономной системы это время  $\tau$  — период периодического движения — может быть любым, напротив, для неавтономной оно обязательно кратно периоду правых частей уравнений движения (6.1).

Перейдем к вопросу об устойчивости периодических движений. Прежде всего необходимо отметить, что существует несколько различных определений понятия устойчивости. Из них наибольшее значение получили устойчивость по Ляпунову и орбитная устойчивость.

Периодическое движение автономной системы, изображающееся в фазовом пространстве замкнутой кривой  $\Gamma$ , называется асимптотически орбитно устойчивым, если все фазовые траектории, близкие к кривой  $\Gamma$ , при  $t \rightarrow +\infty$  к ней асимптотически приближаются, т. е. если для любой фазовой траектории  $M(t)$  ( $-\infty < t < +\infty$ ) из неравенства  $\rho(M(t_0), \Gamma) < \delta$ , при достаточно малом положительном  $\delta$ , следует, что  $\rho(M(t), \Gamma) < \varepsilon(t - t_0, \delta)$ , где  $\varepsilon(t - t_0, \delta) \rightarrow 0$  при  $t - t_0 \rightarrow \infty$  и  $\max \varepsilon(t - t_0, \delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ . При этом под  $\rho(M, \Gamma)$  понимается кратчайшее расстояние от точки  $M$  до кривой  $\Gamma$ .

Периодическое движение  $x_i = \varphi_i(t)$ , где  $\varphi_i(t)$  — периодические периода  $\tau$  функции времени  $t$ , называется асимптотически устойчивым по Ляпунову, если для любого сколь угодно малого положительного  $\varepsilon$  можно указать такое  $\bar{\delta} > 0$ , что для всякого так называемого возмущенного движения  $\bar{x}_i(t), \dots, \bar{x}_n(t)$  с начальными условиями  $\bar{x}_i = \varphi_i(t_0) + \delta_i$  при  $t = t_0$ , где  $|\delta_i| < \bar{\delta}$ , при всех  $t > t_0$  имеет место  $|\bar{x}_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon$  и одновременно  $|\bar{x}_i(t) - \varphi_i(t)| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Если обозначить через  $M(t)$  фазовую точку с координатами  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$  и через  $\bar{M}(t)$  фазовую точку с координатами  $\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_n(t)$ , то требование асимптотической устойчивости по Ляпунову состоит в том, чтобы из условия  $\rho(\bar{M}(t_0), M(t_0)) < \delta$ , где  $\delta$  — некоторое достаточно малое положительное число, следовало, что  $\rho(\bar{M}(t), M(t)) < \varepsilon$  для  $t > t_0$  и  $\rho(\bar{M}(t), M(t)) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Требование устойчивости по Ляпунову является более жестким, чем требование орбитной устойчивости. Разница состоит в том, что для орбитной устойчивости нужно лишь, чтобы фазовые траектории, близкие к  $\Gamma$ , к ней неограниченно приближались, в то время как для устойчивости по Ляпунову требуется, чтобы они не только к ней приближались, но приближались так, чтобы расстояние между фазовой точкой, близкой к траектории с пометкой времени  $t$ , и точкой замкнутой траектории  $\Gamma$  с той же пометкой времени стремилось к нулю.

Асимптотическую устойчивость по Ляпунову целесообразно требовать от периодических движений неавтономной системы. Для периодических движений автономной системы это требование является слишком жестким и никогда не может быть выполнено. Поэтому в случае автономной системы мы будем пользоваться асимптотической орбитной устойчивостью. Из асимптотической орбитной устойчивости при наличии экспоненциального закона приближения, как будет видно из дальнейшего (см. § 11), следует устойчивость (но не асимптотическая) по Ляпунову.

## 7. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОТЫСКАНИИ И ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ К ЗАДАЧЕ ОБ ОТЫСКАНИИ И ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Будем изображать движения системы, описываемой уравнениями (6.1), в пространстве  $\Phi_{n+1}$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и  $t$ . Обозначим через  $S_0$  плоскость  $t=0$ , а через  $S_\tau$  — плоскость  $t=\tau$ . Фазовая траектория, начинающаяся в произвольной точке  $M$  на плоскости  $S_0$ , через время  $\tau$  пересечет плоскость  $S_\tau$  в какой-то точке  $M_\tau$  (рис. 5). Тем самым мы имеем некоторое точечное отображение плоскости  $S_0$  на плоскость  $S_\tau$ . Проектируя вдоль оси времени точки плоскости  $S_\tau$  опять на плоскость  $S_0$ , мы придем к отображению плоскости  $S_0$  в себя. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  координаты точки  $M$  и  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$  координаты точки  $M_\tau$  или, что то же, координаты ее проекции  $\bar{M}$  на плоскость  $S_0$ . Путем интегрирования уравнений движения (6.1) можно найти формулы, связывающие координаты точек  $M$  и  $\bar{M}$  плоскости  $S_0$ , в виде

$$\bar{x}_i = x_i(x_1, x_2, \dots, x_n; \tau) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (7.1)$$

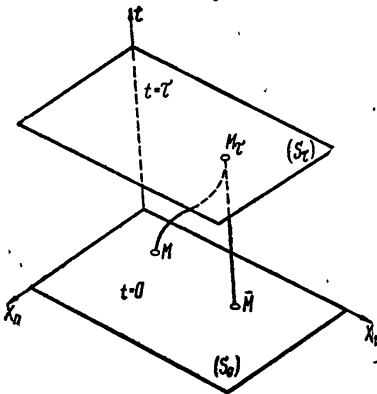


Рис. 5

Отображение плоскости  $S_0$ , определяемое формулами (7.1), обозначим  $T_\tau$ .

Между точечным отображением  $T_\tau$  и движениями рассматриваемой нами системы существует очень тесная связь. Так, периодическим движениям периода  $\tau$  соответствуют неподвижные точки преобразования  $T_\tau$  и, наоборот, неподвижной точке преобразования  $T_\tau$  автономной системы или неавтономной системы с периодом правых частей, равным  $\tau/k$ , где  $k$  — целое число, соответствует периодическое решение системы уравнений (6.1). Под соответствием между периодическими движениями и неподвижными точками понимается, что если фазовая траектория  $\Gamma$  изображает периодическое движение

системы, то точка ее пересечения  $M^*$  с плоскостью  $S_0$  является неподвижной точкой преобразования  $T_\tau$ , и, наоборот, если  $M^*$  неподвижная точка преобразования  $T_\tau$ , то траектория  $\Gamma$ , выходящая из точки  $M^*$ , является изображением периодического движения.

Имеет место не только соответствие между периодическими движениями и неподвижными точками преобразования  $T_\tau$ , но и соответствие между их устойчивостями. Именно из устойчивости по Ляпунову периодического движения неавтономной системы следует устойчивость неподвижной точки, и, наоборот, из устойчивости неподвижной точки преобразования следует устойчивость по Ляпунову соответствующего периодического движения.

Действительно, пусть  $\Gamma$  — фазовая траектория устойчивого по Ляпунову периодического движения периода  $\tau$ . Тогда через время  $\tau$  значения фазовых переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  повторяются, и поэтому, в частности, координаты  $x_1, x_2, \dots, x_n$  точек пересечения  $\Gamma$  с плоскостями  $S_0$  и  $S_\tau$  совпадают.

Пусть  $M(t)$  — точка траектории  $\Gamma$  с пометкой времени  $t$  и пусть  $\tilde{M}(t)$  — точка какой-либо траектории. В силу устойчивости по Ляпунову периодического движения  $\Gamma$  из неравенства  $\rho(M(0), \tilde{M}(0)) < \delta$  следует  $\rho(M(t), \tilde{M}(t)) < \varepsilon$ , где  $\varepsilon \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  и  $\max \varepsilon \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Поэтому,

в частности,  $\rho(M(m\tau), \tilde{M}(m\tau)) < \epsilon_m$ , где  $\epsilon_m \rightarrow 0$ , когда  $m$  возрастает, пробегая целые значения, и  $\max \epsilon_m \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Но точка  $\tilde{M}(m\tau)$  имеет такие же координаты  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , как и точка, получающаяся  $m$ -кратным применением к точке  $\tilde{M}(0)$  преобразования  $T_\tau$ , а точка  $M(m\tau)$  такие же координаты, как точка  $M(0)$ . Так что из неравенства  $\rho(\tilde{M}(0), M(0)) \leq \delta$  следует, что  $\rho(T_\tau^m \tilde{M}(0), M(0)) < \epsilon_m$ , где  $\epsilon_m \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$  и  $\max \epsilon_m \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Этот последний вывод и означает, что неподвижная точка  $M(0)$  преобразования  $T_\tau$ , соответствующая периодическому движению  $\Gamma$ , устойчива.

Пусть теперь  $M(0)$  — устойчивая неподвижная точка преобразования  $T_\tau$  плоскости  $S_0$  в себя. Поскольку  $\tau$  кратно периоду правых частей системы дифференциальных уравнений (8.1), то фазовая траектория, выходящая из точки  $M(\tau)$ , повторяет траекторию, выходящую из точки  $M(0)$ , и, следовательно, является периодической с периодом  $\tau$ . Из устойчивости неподвижной точки вытекает, что для точек  $\tilde{M}(0)$ , достаточно близких к точке  $M(0) = M(m\tau)$ ,  $\rho(M(m\tau), \tilde{M}(m\tau)) < \epsilon_m$ , где  $\epsilon_m \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$  и  $\max \epsilon_m \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ . В силу равномерно-непрерывной зависимости на конечном интервале времени решений (7.1) от начальных условий имеет место и более сильное утверждение

$\rho(M(t), \tilde{M}(t)) < \epsilon'_m$ , где  $\epsilon'_m$  и  $\max \epsilon'_m$  также стремятся к нулю соответственно при  $t \rightarrow \infty$  и  $\delta \rightarrow 0$ , означающее, что периодическое движение  $\Gamma$ , начинающееся в неподвижной точке  $M(0)$ , устойчиво.

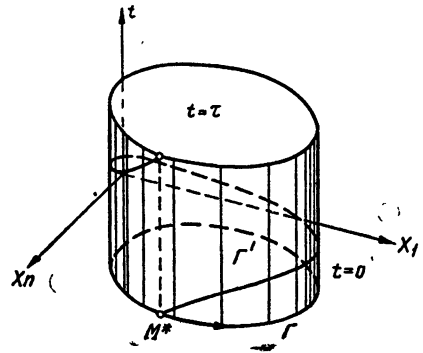


Рис. 6

В случае автономной системы периодическому движению периода  $\tau$  в фазовом пространстве  $\Phi_n$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  отвечает некоторая замкнутая кривая  $\Gamma$ . Если рассматривать пространство  $\Phi_{n+1}$ , как полученное из  $\Phi_n$  добавлением к нему оси времени, то все траектории  $\Gamma'$

этого пространства, выходящие из точек кривой  $\Gamma$ , будут изображать периодические движения рассматриваемой автономной системы ( $\Phi_n$  есть плоскость размерности  $n$  в пространстве  $\Phi_{n+1}$ , на которой  $t=0$ ). Таким образом, в пространстве  $\Phi_{n+1}$  периодическому движению отвечает не одна кривая, а целое семейство кривых, составляющих некоторый цилиндр (рис. 6). Каждой из кривых  $\Gamma'$  этого цилиндра отвечает неподвижная точка преобразования  $T_\tau$ . Совокупность неподвижных точек преобразования  $T_\tau$  составляет кривую  $\Gamma$ .

Из асимптотической орбитной устойчивости периодического движения  $\Gamma$  не следует асимптотическая устойчивость соответствующих ему неподвижных точек  $M^*$  преобразования  $T_\tau$  (рис. 6), поскольку любая точка кривой  $\Gamma$ , пусть и очень близкая к  $M^*$ , при преобразованиях  $T_\tau$  переходит в себя и поэтому не приближается к неподвижной точке  $M^*$ . Для асимптотической орбитной устойчивости периодического движения  $\Gamma$  необходимо и достаточно, чтобы точки  $M$ , близкие к кривой  $\Gamma$ , составленной из неподвижных точек преобразования  $T_\tau$ , при преобразованиях  $T_\tau^m$  к ней неограниченно приближались.

В связи с изложенным для отыскания и изучения периодических движений автономной системы целесообразнее использовать другой способ сведения к точечному преобразованию. Именно, пусть  $\Gamma$  — замкнутая фазовая траектория в фазовом пространстве  $\Phi_n$ . Пересечем ее некоторой

$n-1$ -мерной плоскостью  $F$  (рис. 7). Пусть при этом  $M^*$  — точка пересечения пластинки  $F$  с кривой  $\Gamma$ , а  $M$  — точка пластинки  $F$ , близкая к  $M^*$ . Фазовая кривая, выходящая из точки  $M$ , через некоторое время пересекает  $F$  в некоторой точке  $\bar{M}$ . Тем самым любой точке  $M$  пластинки  $F$ , достаточно близкой к  $M^*$ , ставится в соответствие точка  $\bar{M}$  этой же пластинки. Отображение, переводящее точку  $M$  в  $\bar{M}$ , обозначим через  $T$ . Так же как и для преобразования  $T_\tau$ , можно показать, что неподвижной точке  $M^*$  преобразования  $T$  отвечает периодическое движение  $\Gamma$  и, конечно, обратно, периодическому движению  $\Gamma$ , пересекающему пластинку  $F$ , отвечает неподвижная точка преобразования  $T$  и что из асимптотической устойчивости неподвижной точки  $M^*$  следует асимптотическая же орбитная устойчивость периодического движения  $\Gamma$ , а из асимптотической орбитной устойчивости  $\Gamma$  — асимптотическая устойчивость неподвижной точки  $M^*$ . Тем самым устанавливается, что преобразование  $T$  для периодических движений автономной системы играет такую же роль, как и введенное ранее для изучения периодических движений неавтономной системы преобразование  $T_\tau$ .

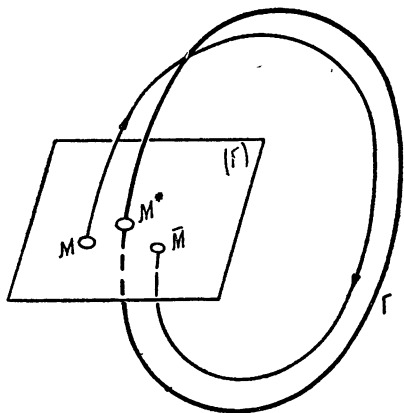


Рис. 7

## 8. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЗАДАЧАМИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Состоянием равновесия системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (8.1)$$

называется ее решение вида  $x_1 = x_{10}, \dots, x_n = x_{n0}$ , где  $x_{10}, \dots, x_{n0}$  — постоянные, для которых

$$X_1(x_{10}, \dots, x_{n0}) = \dots = X_n(x_{10}, \dots, x_{n0}) = 0. \quad (8.2)$$

Непосредственно ясно, что состояние равновесия можно рассматривать как периодическое движение (произвольного периода), стянувшееся в точку. Такой подход особенно целесообразен при изучении зависимости решений дифференциального уравнения (8.1) от параметров, поскольку при изменении последних может фактически иметь место непрерывный переход периодического движения в состояние равновесия. Кроме того, такой подход позволяет непосредственно перенести утверждения, установленные для периодических движений, на состояния равновесия. Так что состояние равновесия  $x_1 = \dots = x_n = 0$  системы (8.1) устойчиво тогда и только тогда, когда устойчива соответствующая ему неподвижная точка  $M^*$  преобразования  $T_\tau$  при каком-нибудь  $\tau > 0^*$ . Если бы нам было известно общее решение системы дифференциальных уравнений (8.1)

$$x_i = x_i(t - t_0; x_1^0, \dots, x_n^0), \quad (8.3)$$

то вопрос об устойчивости неподвижной точки  $M^*$  преобразования  $T_\tau$  свелся бы к вопросу о корнях алгебраического уравнения

\* Поскольку имеет место соотношение  $T_{\tau_1 + \tau_2} = T_{\tau_1} T_{\tau_2}$ , то из устойчивости отображения  $T_\tau$  при какой-нибудь  $\tau > 0$  следует его устойчивость при любом  $\tau$ .



$$\chi(z) = \begin{vmatrix} \left( \frac{\partial x_1}{\partial x_1^0} \right) - z, & \left( \frac{\partial x_1}{\partial x_2^0} \right) & \dots & \left( \frac{\partial x_1}{\partial x_n^0} \right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left( \frac{\partial x_n}{\partial x_1^0} \right), & \left( \frac{\partial x_n}{\partial x_2^0} \right), & \dots & \left( \frac{\partial x_n}{\partial x_n^0} \right) - z \end{vmatrix} = 0, \quad (8.4)$$

в котором производные взяты при  $t - t_0 = \tau$  и  $x_1^0 = \dots = x_n^0 = 0$ . Согласно (8.1)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial x_j^0} &= \frac{\partial}{\partial x_j^0} \frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j^0} X_k = \frac{\partial X_k}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial x_j^0}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} &= \frac{\partial^2 X_i}{\partial x_k \partial x_s} X_s \frac{\partial x_k}{\partial x_j^0} + \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_e} \frac{\partial x_e}{\partial x_j^0}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Для составления уравнения (8.4) нам нужно найти входящие в него производные. Воспользуемся произвольностью величины  $\tau$  и возьмем ее достаточно малой, после чего представим искомые производные в виде

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} \right)_{x_1^0 = \dots = x_n^0 = 0} &= \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} \right)_{x_k^0 = 0} + \\ &+ \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} \right)_{x_k^0 = 0} \right]_{t=t_0=0} \tau + \frac{1}{2} \left[ \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} \right)_{x_k^0 = 0} \right]_{0 < t-t_0 < \tau} \tau^2. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Поскольку при  $t - t_0 = 0$   $x_i = x_i^0$ , то

$$\left( \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} \right)_{t=t_0=0} = \delta_{ij}$$

и выражения (8.6) упрощаются, принимая вид

$$\left( \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} \right)_{x_1^0 = \dots = x_n^0 = 0} = \delta_{ij} + \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right)_{x_k^0 = 0} \tau + A_{ij} \tau^2, \quad (8.7)$$

где величины  $A_{ij}$  ограничены. Воспользуемся теперь найденным выражением для элементов определителя (8.4) и разделим каждую его строчку на  $\tau$ , после чего уравнение (8.4) примет вид

$$\begin{vmatrix} \frac{1-z}{\tau} + \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \right)_0 + A_{11} \tau, & \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right)_0 + A_{12} \tau, & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (8.8)$$

Обозначим предел  $\frac{z-1}{\tau}$  при  $\tau \rightarrow 0$  через  $\lambda$  и перейдем в (8.8) к пределу при неограниченном уменьшении  $\tau$

$$\begin{vmatrix} \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \right)_0 - \lambda, & \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right)_0, & \dots & \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_n} \right)_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left( \frac{\partial X_n}{\partial x_1} \right)_0, & \left( \frac{\partial X_n}{\partial x_2} \right)_0, & \dots & \left( \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \right)_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (8.9)$$

Для устойчивости неподвижной точки преобразования  $T_\tau$  или, что то же, устойчивости состояния равновесия  $x_1=x_2=\dots=x_n=0$  системы уравнений

(8.1) нужно, чтобы все корни  $z$  уравнения (8.8) при каком-нибудь  $\tau > 0$  лежали внутри единичного круга. Как мы сейчас убедимся, для этого корни  $\lambda$  уравнения (8.9) должны лежать на левой полуплоскости. Действительно, пусть

$$\frac{z-1}{\tau} = \alpha(\tau) + i\beta(\tau),$$

тогда

$$z = 1 + [\alpha(\tau) + i\beta(\tau)]\tau,$$

и осталось только убедиться, что при малом  $\tau$   $|z| < 1$ , если предельное значение  $\alpha(0) < 0$ , и что  $|z| > 1$ , если предельное значение  $\alpha(0) > 0$ . Этот последний факт непосредственно вытекает из того, что

$$|z|^2 = (1 + \tau\alpha(\tau))^2 + \beta^2(\tau)\tau^2 = 1 + 2\tau\alpha(\tau) + (\alpha^2(\tau) + \beta^2(\tau))\tau^2.$$

Таким образом, для асимптотической устойчивости состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (8.1) необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнений (8.9), составляемого непосредственно по правым частям рассматриваемых дифференциальных уравнений, лежали на левой полуплоскости или, другими словами, имели отрицательные действительные части.

К вопросу об устойчивости состояния равновесия системы дифференциальных уравнений возможен и другой подход, основывающийся на теореме:

«Если неподвижная точка отображения

$$\bar{x}_i = x_i + \varepsilon X_i(x_1, \dots, x_n) + \varepsilon^2 \theta_i(x_1, \dots, x_n), \quad (8.10)$$

где  $|\theta_i| < M < +\infty$ , устойчива или неустойчива при всех достаточно малых положительных  $\varepsilon$ , то соответственно устойчиво или неустойчиво и состояние равновесия системы (8.1).

«Эта теорема непосредственно следует из того, что при малых  $t-t_0$  решение системы уравнений (8.1) можно записать в виде

$$x_i = x_{i0} + (t-t_0)X_i(x_{10}, \dots, x_{n0}) + \frac{(t-t_0)^2}{2} \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) X_j. \quad (8.11)$$

Пусть  $V(x_1, \dots, x_n)$  функция Ляпунова для отображения (8.10). Для нее должно выполняться неравенство

$$V(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) - V(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$$

или

$$\begin{aligned} V(x_1 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 \theta_1, \dots) - V(x_1, \dots) = \\ = \varepsilon X_i \frac{\partial V}{\partial x_i} + \varepsilon^2 \{ \dots \} < 0. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Из (8.12) следует, что функция  $V$  будет функцией Ляпунова для отображения (8.10) при всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$ , если только производная по времени от функции  $V$  удовлетворяет в некоторой окрестности неподвижной точки, за исключением ее самой, при некотором  $q > 0$  условию

$$\frac{dV}{dt} = X_i \frac{\partial V}{\partial x_i} < -q(x_1^2 + \dots + x_n^2). \quad (8.13)$$

В силу этого мы непосредственно приходим к известным формулировкам прямого метода исследования устойчивости состояния равновесия А. М. Ляпунова.

## 9. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ТОЧЕЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ И УРАВНЕНИЕ В ВАРИАЦИЯХ

Для фактического получения формул точечных отображений  $T_\tau$  или  $T$  нужно проинтегрировать дифференциальные уравнения движения. Затем, исходя из формул точечного преобразования, находится соответствующее ему линеаризованное преобразование. Наша задача сейчас состоит в том, чтобы показать, что для получения линеаризованных точечных отображений  $T_\tau$  или  $T$  достаточно было бы проинтегрировать линеаризованные дифференциальные уравнения движения, называемые уравнениями в вариациях.

Пусть  $x_i = \varphi_i(t)$  (9.1)

периодическое решение периода  $\tau$  уравнений (6.1) и  $M^*$ —соответствующая ему неподвижная точка преобразования  $T_\tau$ .

Введем в уравнениях движения (6.1) новые переменные

$$\xi_i = x_i - \varphi_i(t) \quad (9.2)$$

и разложим правую часть получаемых уравнений в ряды Тейлора по переменным  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  с остаточными членами второго порядка, в результате чего придем к системам уравнений вида

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_1} \right)_{x_j=\varphi_j(t)} \xi_1 + \dots + \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_n} \right)_{x_j=\varphi_j(t)} \xi_n + S_i. \quad (9.3)$$

В этих уравнениях  $S_i$  обозначают некоторые квадратичные формы от переменных  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  с коэффициентами, зависящими от времени  $t$  и от  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ .

Отбрасывая в уравнениях (9.3) нелинейные члены  $S_i$  не ниже, чем второго порядка малости относительно  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , придем к линеаризованным вблизи периодического решения (9.11) уравнениям вида

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_1} \right)_{x_j=\varphi_j(t)} \xi_1 + \dots + \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_n} \right)_{x_j=\varphi_j(t)} \xi_n. \quad (9.4)$$

Эти уравнения (9.4) называются уравнениями в вариациях. Они представляют собою систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими (периода  $\tau$ ) коэффициентами.

В новых переменных  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  периодическому решению (9.1) отвечает решение  $\xi_1 = \dots = \xi_n = 0$ , а неподвижная точка преобразования  $T_\tau$  имеет координаты  $\xi_1 = \dots = \xi_n = 0$ . Теперь нужно показать, что преобразование  $T_\tau$ , соответствующее линеаризованным уравнениям (9.4), есть линеаризованное преобразование  $T_\tau$ .

Прежде всего заметим, что для остаточных членов  $S_i$  и коэффициентов  $\left( \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right)_{x_k=\varphi_k(t)}$  можно указать оценки

$$|S_i| < M(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2), \quad (9.5)$$

$$\left| \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right)_{x_k=\varphi_k(t)} \right| < N, \quad (9.6)$$

где  $M$  и  $N$ —некоторые положительные числа. Используя (9.5) и (9.6), непосредственно из уравнений (9.3) находим, что

$$|\dot{\xi}_i| < N(|\xi_1| + \dots + |\xi_n|) + M(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2),$$

и поэтому  $\xi_i$  по величине заведомо меньше решения  $\xi$  мажорантного уравнения



мы найдем формулы точечного отображения  $T_\tau$

$$\bar{x}_k = u_{k1}(\tau) x_1 + u_{k2}(\tau) x_2 + \dots + u_{kn}(\tau) x_n \quad (10.4)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n).$$

С помощью некоторой линейной замены

$$x_j = a_{j1}\xi_1 + a_{j2}\xi_2 + \dots + a_{jn}\xi_n \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (10.5)$$

приведем точечное отображение (10.4) к каноническому виду

$$\bar{\xi}_j = x_j \xi_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (10.6)$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — корни характеристического полинома  $\chi(z)$  преобразования  $T_\tau$ , равного

$$\chi(z) = \text{Det} \| u_{ij}(\tau) - \delta_{ij} z \|. \quad (10.7)$$

Рассмотрим решение уравнений (10.1) при начальных условиях  $x_j^0 = a_{j1}\xi_1^0 + \dots + a_{jn}\xi_n^0$ . После соответствующей подстановки в (10.3) это решение можно записать в виде

$$x_j(t) = v_{j1}(t)\xi_1^0 + \dots + v_{jn}(t)\xi_n^0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (10.8)$$

где  $v_{jk}(t)$  — некоторые функции времени.

Нам известно, что, спустя время  $\tau$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  примут значения, для которых соответствующие  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, t$  согласно (10.6) будут  $x_1\xi_1, \dots, x_n\xi_n$ . Поэтому решение (10.8) для  $t > \tau$  можно рассматривать как решение системы (10.3), соответствующее начальным условиям  $x_j = a_{j1}x_1\xi_1^0 + \dots + a_{jn}x_n\xi_n^0$  при  $t = \tau$ , и, следовательно, может быть записано в виде

$$x_j(t) = v_{j1}(t - \tau)\xi_1^0 x_1 + \dots + v_{jn}(t - \tau)\xi_n^0 x_n. \quad (10.9)$$

Сравнивая (10.8) с (10.9), найдем, что

$$x_k v_{jk}(t - \tau) = v_{jk}(t),$$

и поэтому функция

$$w_{jk}(t) = e^{-\frac{t}{\tau} \ln x_k} v_{jk}(t) \quad (10.10)$$

является периодической функцией  $t$  периода  $\tau$ . Теперь, пользуясь (10.10), мы можем записать общее решение (10.8), в котором  $\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_n^0$  будем рассматривать как постоянные интегрирования, в виде

$$x_j(t) = e^{\rho_1 t} w_{j1}(t) \xi_1^0 + \dots + e^{\rho_n t} w_{jn}(t) \xi_n^0, \quad (10.11)$$

где  $w_{jk}(t)$  — периодические периода  $\tau$  функции времени, а  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  — так называемые характеристические показатели системы уравнений (10.1), связанные с корнями  $x_1, x_2, \dots, x_n$  характеристического полинома (10.7) преобразования  $T_\tau$  соотношениями

$$\rho_k = \frac{1}{\tau} \ln x_k. \quad (10.12)$$

Заметим, что в частном случае, когда уравнения (10.1) превращаются в систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в соотношении (10.12),  $\rho_k$  представляют собою корни характеристического уравнения системы (10.1).

## 11. О СВЯЗИ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМ ОБРАЗОМ ПОСТРОЕННЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ. ТЕОРЕМА АНДРОНОВА И ВИТТА

Пусть в пространстве  $\Phi_{n+1}$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n, t$  некоторая траектория  $\Gamma$  неавтономной или автономной системы пересекает в точках  $M_0$  и  $\bar{M}_0$  поверхности  $S$  и  $\bar{S}$  (рис. 8). При этом траектория  $L$ , начинающаяся в произвольной, близкой к  $M_0$ , точке  $M$ , так же, как и  $\Gamma$ , пересечет поверхность  $S$  в некоторой близкой к  $\bar{M}_0$  точке  $\bar{M}$ . Тем самым определяется в окрестностях точек  $M_0$  и  $\bar{M}_0$  точечное отображение поверхности  $S$  в  $\bar{S}$ .

Наша задача сейчас будет состоять в указании способов отыскания этого точечного отображения и способов его линеаризации. Допустим сначала, что нам известно общее решение дифференциальных уравнений, описывающих рассматриваемую систему,

$$x_i = \varphi_i(t; x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0; t_0).$$

С его помощью связь между координатами  $x_1, x_2, \dots, x_n, t$  точки  $M_1$  и координатами  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{t}$  точки  $\bar{M}$  можно представить в виде

$$\bar{x}_i = \varphi_i(\bar{t}; x_1, x_2, \dots, x_n; t) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (11.1)$$

$$\bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{t}) = 0,$$

где  $\bar{f} = 0$  — уравнение поверхности  $\bar{S}$ . Кроме того, если точка  $M(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$  лежит на поверхности  $S$ , то

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0. \quad (11.2)$$

Уравнения (11.1) и (11.2) определяют отображение поверхности  $S$  в  $\bar{S}$ . Одни уравнения (11.1) определяют отображение  $n+1$ -мерной окрестности точки  $M$  в  $n$ -мерную окрестность точки  $\bar{M}$ . В частном случае, когда поверхности  $S$  и  $\bar{S}$  представляют собою плоскости, на которых время  $t$  равно соответственно  $t_0$  и  $\bar{t}_0$ , соотношения (11.1) и (11.2) упрощаются, принимая вид

$$\bar{x}_i = \varphi_i(\bar{t}_0; x_1, x_2, \dots, x_n, t_0).$$

Пусть траектория  $L$ , выходящая из точки  $M(x_1, \dots, x_n, t)$ , пересекает плоскость  $t = t_0$  в точке  $M'(x_1', \dots, x_n', t_0)$  и пересекает плоскость  $t = \bar{t}_0$  в точке  $\bar{M}'(\bar{x}_1', \dots, \bar{x}_n', \bar{t}_0)$ . Ясно, что точечное отображение (обозначим его  $T$ ), переводящее точку  $M$  в  $\bar{M}$ , можно рассматривать полученным в результате трех последовательных преобразований соответственно переходам от точки  $M$  к  $M'$ , от  $M'$  к  $\bar{M}'$  и от  $\bar{M}'$  к  $\bar{M}$ . Отображение, переводящее  $M'$  в  $\bar{M}'$ , имеет вид

$$\bar{x}_i' = \varphi_i(\bar{t}_0; x_1', x_2', \dots, x_n', t_0) \quad (11.3)$$

и представляет собою, согласно обозначениям, принятым ранее, отображение  $T_{\bar{t}_0-t_0}$ . Соответствующее ему линеаризованное в окрестностях точек  $M_0$  и  $\bar{M}_0$  отображение может быть получено интеграцией дифференциальных уравнений движения, линеаризованных вблизи  $\Gamma$ . Рассмотрим отображение, переводящее точку  $M$  в  $M'$ . Для этого отображения имеем соотношения

$$x'_i = \varphi_i(t_0; x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad (11.4)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0.$$

Линеаризуя эти уравнения (11.4) в окрестности неподвижной точки  $M_0$ , приходим к соотношениям \*

$$dx'_i = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_{M_0} dx_j + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\right)_{M_0} dt,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{M_0} dx_j + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{M_0} dt = 0$$

или, исключая  $dt$  (предполагается, естественно, что  $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{M_0} \neq 0$ ),

к соотношению

$$dx'_i = \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_{M_0} - \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\right)_{M_0} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{M_0} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{M_0}^{-1} \right\} dx_j.$$

Замечая, что

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_{M_0} = \delta_{ij}$$

и что, согласно дифференциальным уравнениям движения рассматриваемой системы,

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\right)_{M_0} = -(X_i)_{M_0},$$

запишем линеаризованные уравнения отображения, переводящего  $M$  в  $M'$ , в виде

$$dx'_i = dx_i + (X_i)_{M_0} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{M_0} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{M_0}^{-1} dx_j. \quad (11.5)$$

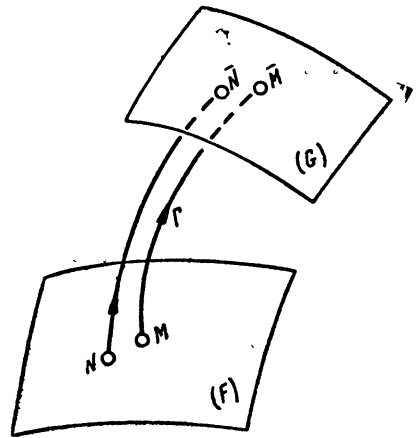


Рис. 9

Таким образом, линеаризованное отображение  $T$  может быть получено как произведение линейного преобразования (11.5), линеаризованного отображения  $T_{\bar{t}_0-t_0}$  (11.3) и линейного отображения, обратного (11.5), с заменой  $M_0$  на  $\bar{M}_0$  и  $f$  на  $\bar{f}$ .

Пусть теперь  $\Phi_n$  пространство фазовых переменных  $x_1, \dots, x_n$  автономной системы и пусть  $F$  и  $G$  две пластинки, пересекающие фазовую траекторию  $\Gamma$ , определяемую уравнениями  $x_i = \varphi_i(t)$  в точках  $M$  и  $\bar{M}$ , для которых соответственно  $t=0$  и  $t=\tau$  (рис. 9). Введем в окрестности траектории  $\Gamma$  новые координаты  $u_1, u_2, \dots, u_n$  с помощью замены вида

$$x_i = \varphi_i(u_1) + \alpha_{i2}(u_1)u_2 + \dots + \alpha_{in}(u_1)u_n \quad (11.6)$$

так, чтобы  $u_1=0$  на пластинке  $F$  и  $u_1=\tau$  на пластинке  $G$ . При такой замене координатной плоскостью  $u_1=\text{const}$  является некоторая плоскость, пересекающая кривую  $\Gamma$  в точке с пометкой времени  $t=u_1$ . При изменении  $u_1$  от нуля до  $\tau$  эта плоскость перемещается из первоначального своего положения, когда она совпадает с  $F$ , к конечному, при котором она совмещается с  $G$ . Координатная линия, на которой  $u_2=\dots=u_n=0$  и меняется только  $u_1$ , совпадает с фазовой траекторией  $\Gamma$ .

Пусть  $N$  произвольная точка в фазовом пространстве, близкая к точке  $M$ , и пусть она, спустя время  $t$ , близкое к  $\tau$ , займет новое положение

\* По дважды встречающемуся индексу  $j$  производится суммирование от 1 до  $n$ .







внутри единичного круга, следует устойчивость по Ляпунову (не асимптотическая).

Действительно, пусть  $N_0, N_1, N_2, \dots$  последовательные точки пересечения с пластинкой  $F$  некоторой близкой к  $\Gamma$  фазовой траектории и пусть  $t_0=0, t_1, t_2, \dots$  соответствующие им моменты времени. Поскольку все корни характеристического полинома преобразования  $T$  лежат строго внутри единичного круга, то, если точка  $N_0$  достаточно близка к  $M^*$ ,

$$\rho(N_{k+1}, M^*) < \mu \rho(N_k, M^*), \quad (11.16)$$

где  $0 < \mu < 1$ .

Теперь из (11.13) и (11.16) следует, что

$$\begin{aligned} |t_n - n\tau| &\leq |t_n - t_{n-1} - \tau| + |t_{n-1} - t_{n-2} - \tau| + \dots \\ &\dots + |t_1 - t_0 - \tau| < A \{ \rho(N_{n-1}, M^*) + \rho(N_{n-2}, M^*) + \dots \\ &\dots + \rho(N_0, M^*) \} < A (1 + \mu + \dots + \mu^{n-1}) \rho(N_0, M^*) < \\ &< \frac{A}{1 - \mu} \rho(N_0, M^*), \end{aligned}$$

и поэтому временное расстояние между фазовыми точками, движущимися по траектории  $\Gamma$  и близкой к ней траектории  $L$ , остается сколь угодно малым, если только начальная точка  $N_0$  траектории  $L$  достаточно близка к  $\Gamma$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов. Вестник АН СССР, 1944, 6, 101 (резюме).
2. А. А. Андронов. Изв. АН СССР, сер. физ., 1945, 9, 1—2, 30.
3. А. А. Андронов, Г. С. Горелик, Н. Д. Папалекси, С. М. Рытов. Успехи физических наук, 1947, 33, 335.
4. А. А. Андронов и А. Г. Майер. ДАН СССР, 1945, 47, 5, 345.
5. А. А. Андронов и А. Г. Майер. Автоматика и телемеханика, 1947, 8, 5, 314
6. А. А. Андронов и Н. Н. Баутин. ДАН СССР, 1944, 43, 5, 197.
7. А. А. Андронов и А. Г. Майер. ДАН СССР, 1944, 43, 2, 58.
8. А. А. Андронов и Н. Н. Баутин. ДАН СССР, 1945, 46, 4, 158
9. А. А. Андронов, Н. Н. Баутин и Г. С. Горелик. Автоматика и телемеханика, 1946, 7, 1, 15.
10. А. А. Андронов и Ю. И. Неймарк. ДАН СССР, 1946, 51, 1, 17.
11. Н. Н. Баутин. ДАН СССР, 1948, 62, 1, 17.
12. Н. Н. Баутин. ДАН СССР, 1949, 65, 3, 279.
13. Н. Н. Баутин. Сборник памяти А. А. Андропова, М., изд. АН СССР, 1955, 109.
14. А. А. Таль. Сборник памяти А. А. Андропова, М., изд. АН СССР, 1955, 282.
15. Н. А. Железов. Прикладная математика и механика, 1949, 13, 1, 3.
16. А. А. Алексеев. Сборник памяти А. А. Андропова, М., изд. АН СССР, 1955, 45. Труды ГИФТИ и радиофака ГГУ, 1956, 35, 105.
17. Н. А. Фуфаев. Сборник памяти А. А. Андропова, М., изд. АН СССР, 1955, 334—382. Автоматика и телемеханика, 5, 1953, 570
18. Ю. И. Неймарк. Инж. сборник, 1953, 16, 13.
19. Л. В. Беспалова. Изв. АН СССР, сер. техническая, 1957.
20. Ю. И. Неймарк, И. М. Кубланов. Автоматика и телемеханика, 1953, 1, 34.
21. А. М. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения, Харьков, 1902.
22. H. Poincaré. Methodes nouvelles de la mecanique celeste, 3, Paris, 1892
23. Г. Биркоф. Динамические системы, Гостехиздат, 1941.
24. Levi-civita Annali di Matematica, Milan, 1907
25. J. Haag. Bulletin des Sciences mathematiques, 73, 1949.
26. H. Leaute. Journde e'Ecole Polutechnique, 1885, 55, 1.
27. S. Lattes. Annali di Matematica, Serie 3, 13, 907
28. M. Koenigs. Bullet. des Sciences mathem., 1883; Annales de l'Ecole Normale, 1884; Annales de l'Ecole Normale, 1885
29. А. А. Андронов и А. А. Витт. ЖЭТФ, 1933, 3, 373.
30. Ю. И. Неймарк. Динамика релейных систем автоматического регулирования. Диссертация, М., 1956.
31. Ю. И. Неймарк. Труды ГИФТИ и радиофизического факультета ГГУ, Ученые записки, т. 30 (серия физическая), М., изд. «Советское радио», 1956.