

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ФЛЮКТУАЦИЙ В АВТОГЕНЕРАТОРАХ. ВЛИЯНИЕ ФЛИККЕР-ШУМА

*В. С. Троицкий*

Развитая ранее теория флюктуаций колебаний ламповых генераторов удовлетворительно объясняла лишь далекие крылья спектральной линии. В настоящей статье проводится дальнейшая разработка методов теории флюктуаций колебаний автогенераторов, позволяющая решить задачу о влиянии фликкер-шума на флюктуации амплитуды и частоты колебаний лампового генератора. Показано, что фликкер-шум всегда вызывает флюктуации амплитуды колебаний генератора; флюктуации частоты вызываются лишь при несовпадении частоты контура генератора с частотой колебаний. Указанное влияние фликкер-шума может служить, по крайней мере, отчасти объяснением полной (технической) ширины линии лампового генератора и формы контура линии. Полученные результаты качественно объясняют наблюдаемые на опыте спектры флюктуаций частоты и амплитуды.

### 1. СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ШИРИНЫ ЛИНИИ ЛАМПОВЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

Основы теории флюктуаций колебаний ламповых генераторов были впервые разработаны Берштейном в 1938 г. [1]. Он исходил из уравнения колебаний лампового генератора, составленного с учетом действующих в нем ЭДС тепловых шумов сопротивления контура  $\xi_0(t)$  и дробового шума лампы  $\xi_1(t)$ . В несколько обобщенной форме, справедливой для различных схем, это уравнение может быть представлено в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu f(x, \dot{x}) + D_0 \xi_0 + D_1 \xi_1, \quad (1)$$

где  $\mu$ —малый параметр,  $D_0$  и  $D_1$ —некоторые линейные интегродифференциальные операторы, зависящие от конкретного вида схемы генератора и выбора переменной  $x$ . Решение уравнения (1) ищется в виде  $x = a(t) \cos \psi$ . Методом усреднения (метод Ван-дер-Поля) для  $a$  и  $\psi$  находятся укороченные нелинейные уравнения, которые далее линеаризуются относительно малых флюктуаций амплитуды  $a_0$ . Для схемы генератора с контуром в аноде, ограничиваясь лишь учетом воздействия дробовых шумов ( $\xi_0=0, \xi_1=\xi$ ), при изохронности генератора линеаризованные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= p\alpha - \omega_0^2 \xi(t) \sin \omega_1 t, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \nu(t) = -\omega_0^2 \xi(t) \cos \omega_1 t, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\alpha = \frac{a - a_0}{a_0}$ —случайное относительное изменение амплитуды,  $\varphi$ —случайная фаза колебаний,  $\varphi = \psi - \psi_1$ , где  $\psi_1 = \omega_1 t$ ;  $\nu(t) = \omega - \omega_1$ —случайное изменение частоты колебаний и  $p(a_0)$ —прочность предельного цикла.

В работе [1] решение флюктуационных уравнений (2) проводится с помощью уравнения Эйнштейна—Колмогорова. Находятся законы распределения  $\alpha(t)$  и дрейфа фазы  $\varphi(t + \tau) - \varphi(t) = \Delta\tau$ , а отсюда их функции автокорреляции и спектры. С помощью уравнения Эйнштейна—Колмогорова уравнение (2) решается лишь в предположении, что  $\xi(t)$  является дельта коррелированным. Последнее приводит к диффузионному закону дрейфа фазы  $(\overline{\Delta\tau \varphi})^2 = \chi(\tau) = D\tau$ .

В действительности шумы тока лампы не могут считаться дельта-коррелированными из-за фликкер-шума лампы. Кроме того, интенсивность шума лампы меняется за период колебаний вместе с колебаниями тока анода. Аппарат уравнений Эйнштейна—Колмогорова не позволяет учесть эти факторы, отмечавшиеся позднее Берштейном, поэтому в [1, 2] принималось в расчет лишь воздействие средней за период интенсивности дробовых шумов, которая находилась интегрированием интенсивности дробового шума за период изменения тока анода лампы.

В работах Горелика [3] флюктуации колебаний рассматривались как скачки изображающей точки на искаженном (вследствие дискретности заряда) предельном цикле. Подсчет действия толчков фазы позволяет определить коэффициент диффузии  $D$ , который совпадает с  $D$ , найденным в [1]. Наряду с малыми естественными толчками фазы из-за дробовых и тепловых шумов Гореликом рассматривались большие (относительно первых) и медленные «уходы» фазы, вызванные различными техническими причинами, в связи с чем введено понятие соответственно естественной и технической ширины линии.

Недавно Рытовым [4] метод расчета флюктуаций в автоколебательных системах введен в рамки общего метода малого параметра теории колебаний. Выращения (2) были получены из (1) нахождением второго приближения по  $\mu$ , причем флюктуационная сила должна полагаться порядка  $\mu^2$ . Далее, в [4] из флюктуационных уравнений по заданной функции корреляции случайной силы  $\xi(t)$  (которая, как и в [1], полагалась дельта-коррелированной) находились функции автокорреляции  $\alpha(t)$  и  $\nu(t)$  и дрейф фазы. Следует указать также на работу Кузнецова, Стратоновича и Тихонова [19], продолжавшую в методическом отношении направление, развиваемое в [1].

В рассмотренной группе работ флюктуации фазы характеризовались обычно величиной  $\chi(\tau)$ , которая в простейшем случае сводилась к  $D\tau$  [1] или стремилась к  $D\tau$  при достаточно большом  $\tau$  [3, 4].

Представляет несомненный интерес нахождение спектра самого колебания, а не только поведения фазы. (В цитированных работах этот вопрос практически не решался. Довольно сложные расчеты были проведены лишь в [1] для случая диффузионного дрейфа фазы.) Нетрудно видеть, что этот вопрос сводится к рассмотрению спектра колебания, хаотически модулированного по фазе и амплитуде. В общем виде спектр такого колебания рассмотрен в работах Мидльтона [5] и позднее в [6, 7]. За исходную характеристику процесса модуляции авторы принимают спектральную плотность  $\omega_\nu(F)$  случайных девиаций частоты  $\nu(t)$  и спектральную плотность относительных флюктуаций амплитуды  $\omega_\alpha(F)$ . Однако результаты этих работ до последнего времени не применялись в теории спектральной ширины линии, так как не были установлены связи между различными параметрами, используемыми в обеих теориях. Отчасти этот разрыв был устранен работой [8], где, помимо прочего, показано, что для гладкого спектра коэффициент диффузии равен половине спектральной плотности флюктуаций частоты для нулевой Фурье компоненты ( $\omega_\nu(0) = 2D$ ). Там же обсуждаются известные соотношения между  $\chi(\tau)$  и  $\omega_\nu(F)$ .

В работах [5] и [18] в общем виде и в [8] для частных случаев показано, что ширина линии определяется поведением спектра  $\omega_\nu(F)$  флюктуаций частоты вблизи частот  $F$ , примыкающих к нулю. Так, например, для спектра  $\omega_\nu(F)$ , ширина которого много больше  $\omega_\nu(0)$ , спектральная ширина линии равна  $\Delta F = \frac{1}{4\pi} \omega_\nu(0)$  [8]. По нашему мнению, целесообразно проводить рассмотрение теоретических и экспериментальных результатов о спектральной ширине линии генераторов с более последовательной точки зрения частотной модуляции, основываясь на спектре  $\nu(t)$ . Спектральный подход к решению (2), в отличие от подхода в [1],

позволяет учесть конечное время корреляции и нестационарность  $\xi(t)$  в процессе колебаний. В частности, из (2) видно, что низкочастотная часть спектра  $\nu(t)$ , имеющая значение для спектральной ширины, образуется простым переносом спектра  $w_\xi(\omega)$  функции  $\xi(t)$  на величину  $\omega_1$  в сторону низких частот. Следовательно, существенным для формирования спектральной ширины линии является лишь спектр  $w_\xi(\omega)$  около частоты колебаний  $\omega_1$ . Отсюда следует, что предположение дельта-корреляции  $\xi(t)$  не может привести ни к чему иному, как гладкому спектру  $w_\nu(F) = \text{const}$  флюктуаций частоты.

Одновременно с разработкой общей теории флюктуаций в автоколебательной системе ряд работ был посвящен расчету флюктуаций в различных конкретных типах ламповых генераторов [4, 9, 10]. Кроме этого, дана теория флюктуаций в клистронном генераторе [11], удовлетворительно согласующаяся с опытом для крыльев линии [12], а недавно дана теория флюктуаций и в молекулярном генераторе [13]. Однако, несмотря на обилие работ в области теории спектральной ширины линии, вопрос о ширине линии лампового генератора еще не решен до конца даже качественно. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

## 2. РАСХОЖДЕНИЕ МЕЖДУ ТЕОРИЕЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ШИРИНЫ И ОПЫТОМ, ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Измерения флюктуаций колебаний лампового генератора впервые были выполнены Берштейном [2] по разработанной им же методике. За последнее время, особенно в американской литературе, появилось много работ по измерению флюктуаций колебаний в генераторах СВЧ [14]. Однако разницей в измеряемых параметрах и зачастую неясностью условий опыта не позволяют произвести сравнение этих результатов с теорией. Это объясняется, между прочим, тем, что указанные работы основываются на различных и часто неверных теоретических представлениях о флюктуациях в автоколебательной системе. Вследствие сказанного, единственно надежными данными являются измерения в [2], которые выявили сильный рост спектральной плотности флюктуаций частоты  $w_\nu(F)$  и амплитуды на низких частотах, вместо предсказываемого теорией постоянства спектральной плотности. Теоретическая величина  $w_\nu(F)$  по порядку совпадала с экспериментальной лишь для достаточно высоких частот  $F \geq 10^4$  гц. Недавние измерения Берштейна и Сибирякова показали, что  $w_\nu(F)$  меняется примерно, как  $F^{-2}$ , от  $10^3$  гц вплоть до частоты в один герц. Объяснение указанному несогласию с теорией искалось с одной стороны во влиянии фликкер-шума, действие которого не учитывалось теорией уже по одному тому, что с самого начала  $\xi(t)$  принималась дельта-коррелированной, а с другой — флюктуациями параметров генератора [2, 3]. Однако если не принимать во внимание изменение шумов лампы  $\xi(t)$  за период, но учитывать в  $\xi(t)$  спектр фликкер-шума, то можно показать, что последний не оказывает никакого влияния на спектр  $w_\nu(F)$  так же, как и на спектр  $w_a(F)$  флюктуаций амплитуды. Действительно, как было показано выше, вид спектра  $w_\nu(F)$  (а также и  $w_a(F)$ ) определяется видом спектра  $\xi(t)$  в области частот, близких к частоте колебаний. Отсюда ясно, что если частота колебаний лежит вне полосы частот фликкер-шума, то его действие отсутствует (рис. 1).

Из сказанного очевидна необходимость дальнейшей разработки теории флюктуаций колебаний лампового генератора. Несомненно, что новые результаты могут быть скорее получены разработкой и применением новых методов решения задачи и, в частности, методов обоснования флюктуационных уравнений и их решения. В этом методическом отношении сделан определенный шаг вперед в цитированных выше работах Рытова.

В настоящей работе проводится дальнейшая разработка теории на основе более последовательного применения метода усреднения и спектрального подхода как к задаче в целом, так и к решению флюктуационных уравнений. Это позволяет развить теорию флюктуаций в автогенераторе, учитывающую влияние фликкер-шума лампы на флюктуации амплитуды и частоты колебаний. Показано, что влияние фликкер-шума объясняется модуляцией шумов лампы самим процессом колебаний или, иными словами, неравномерностью действия шумов лампы в течение цикла колебаний.

### 3. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим метод Берштейна с точки зрения метода усреднения в теории нелинейных колебаний, а также найдем общие решения для флюктуаций амплитуды и фазы при спектральном подходе к задаче. Уравнение (1) можно записать в более общем виде, учитывая всевозможные источники флюктуаций в схеме, например фликкер-шум  $\xi_2(t)$  или шумовые ЭДС и токи от внешних источников  $\xi_3(t)$ , включенных в автогенератор, или, наконец, флюктуационные члены, связанные с малыми флюктуациями параметров  $\xi_4(t)$  и т. д.

Поскольку полный шумовой ток лампы можно представить как сумму дробового тока  $\xi_1(t)$  и фликкер-тока  $\xi_2(t)$ , действующих независимо в одной и той же цепи, то в новом уравнении операторы для дробового и фликкер-токов будут одинаковы, тогда

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu f(x, \dot{x}) + D_0 \xi_0 + D_1 \xi_1 + D_1 \xi_2 + D_2 \xi_3 + \dots \quad (3)$$

Для краткости дальнейших записей обозначим  $\xi = D_0 \xi_0 + D_1 \xi_1 + D_1 \xi_2 + D_2 \xi_3 + \dots$ . Применим обычную методику нахождения уравнений первого приближения по методу усреднения [15]. Полагая в (3)  $x = a \cos \psi = a \cos(\omega_0 t + \vartheta)$ , получим уравнение в стандартной форме, после усреднения которого за период колебания будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= A_1(a) - \frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \xi(t) \sin \psi d\psi, \\ \psi &= \psi(t), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= B_1(a) - \frac{1}{2\pi\omega_0 a} \int_0^{2\pi} \xi(t) \cos \psi d\psi, \end{aligned} \quad (4)$$

где, как обычно,

$$\begin{aligned} A_1(a) &= -\frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \mu f(a \cos \psi; -a\omega_0 \sin \psi) \sin \psi d\psi, \\ B_1(a) &= -\frac{1}{2\pi a \omega_0} \int_0^{2\pi} \mu f(a \cos \psi; a\omega_0 \sin \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \quad (5)$$

Как известно, при отсутствии в системе флюктуаций решение уравнений

$$\frac{da_0}{dt} = A_1(a_0) = 0, \quad \frac{d\vartheta_1}{dt} = B_1(a_0) \quad (6)$$

дает установившиеся значения амплитуды колебаний  $a_0$  и частоты  $\omega_1 = \omega_0 + B_1(a_0)$ . Флюктуационные силы приводят к тому, что  $a =$

$= a_0 (1 + \alpha(t))$  и  $\vartheta = \vartheta_1 + \varphi(t)$ , где  $\alpha(t)$  — случайная глубина модуляции амплитуды и  $\varphi(t)$  — случайная фаза колебаний. Подставляя выражения для  $a$  и  $\vartheta$  в (4), полагая  $|\alpha| \ll 1$ ;  $\psi = \omega_1 t^*$ , учитывая (6), получим

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= p\alpha - \frac{1}{2\pi\omega_0 a_0} \int_0^{2\pi} \xi \left( \frac{\psi}{\omega_1} \right) \sin \psi d\psi, & \psi &\approx \omega_1 t, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \nu(t) = qa_0\alpha - \frac{1}{2\pi\omega_0 a_0} \int_0^{2\pi} \xi \left( \frac{\psi}{\omega_1} \right) \cos \psi d\psi, \\ -p &= -p(a_0) = -\left( \frac{\partial A_1}{\partial a} \right)_{a=a_0}, & q &= q(a_0) = \left( \frac{\partial B_1}{\partial a} \right)_{a=a_0}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $-p$  — прочность предельного цикла.

Интегралы правой части (7) не равны нулю, если в спектре случайных функций  $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n$  существуют частоты  $\omega$ , равные или близкие к  $\omega_1$ . При этом в подынтегральном выражении имеются медленно меняющиеся гармонические функции с разностной частотой  $\Omega = \omega_1 - \omega \ll \omega_1$ . После усреднения останутся лишь Фурье-компоненты с разностной частотой  $\Omega \ll \omega_1$ . С достаточной точностью можно считать, что спектр интеграла отличен от нуля только в пределах частот  $0 \leq \Omega \leq 0,1\omega$ . Принимая это во внимание (т. е. учитывая в спектре  $\xi(t)$  частоты лишь в интервале  $0,9\omega_1 \leq \omega \leq 1,1\omega_1$ ), (7) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= p\alpha - \frac{1}{a_0\omega_0} \xi(t) \sin \omega_1 t, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= qa_0\alpha - \frac{1}{a_0\omega_0} \xi(t) \cos \omega_1 t. \end{aligned} \quad (8)$$

Обозначим  $\xi_{\perp} = \frac{1}{a_0\omega_0} \xi \sin \omega_1 t$ ;  $\xi_{\parallel} = \frac{1}{a_0\omega_0} \xi \cos \omega_1 t$ . Разделяя в (8) переменные, нетрудно получить

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} - p\alpha &= -\xi_{\perp}, \\ \frac{d\varphi}{dt} - p\nu &= -(qa_0\xi_{\perp} + \xi_{\parallel} - p\xi_{\parallel}). \end{aligned} \quad (9)$$

Однородное уравнение  $\dot{\alpha} - p\alpha = 0$  является известным уравнением в вариациях для исследования устойчивости решения  $a_0$ . Дальнейшее решение флюктуационных уравнений проводить с помощью уравнения Эйнштейна—Колмогорова, как это делалось в [1] или как в [4], нецелесообразно. Уравнения решаются стандартным и хорошо известным методом Фурье разложения, который непосредственно дает интересующие нас спектры процессов  $a(t)$  и  $\nu(t)$  при самых общих предположениях о спектре  $\xi(t)$ . Это позволяет также наиболее просто решить задачу, когда  $\xi(t)$  периодически нестационарно\*\*. Мы рассмотрим сначала известный случай, когда  $\xi(t)$  стационарно, и получим более полные и общие выражения для спектров  $\alpha(t)$  и  $\nu(t)$  без специальных предположений о характере спектра  $\xi(t)$  (дельта-корреляция), которые делались до настоящего времени.

\* Замена  $\psi = \omega_1 t + \varphi(t)$  на  $\omega_1 t$ , как можно показать, не скажется на результатах, если спектр  $\xi(t)$  много шире спектральной ширины линии.

\*\* Термин предложен Гудзенко для нестационарных случайных процессов, вероятностные характеристики которых являются периодическими функциями времени.

#### 4. СТАЦИОНАРНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

Нетрудно видеть, что если Фурье-спектр стационарной случайной функции  $\xi(t)$  равен

$$\xi(\Omega) = \int_0^T \xi(t) e^{-i\Omega t} dt, \quad -\infty \leq \Omega \leq \infty,$$

то Фурье-спектры  $\xi_{\perp}$  и  $\xi_{\parallel}$  будут:

$$\begin{aligned} \xi_{\perp}(\Omega) &= \frac{i}{2a_0\omega_0} \{ \xi(\Omega + \omega_1) - \xi(\Omega - \omega_1) \}, \\ \xi_{\parallel}(\Omega) &= \frac{1}{2a_0\omega_0} \{ \xi(\Omega + \omega_1) + \xi(\Omega - \omega_1) \}. \end{aligned} \quad (10)$$

Фурье-спектры  $\alpha_{\Omega}$  и  $\nu_{\Omega}$  будут:

$$\alpha_{\Omega} = \frac{\xi_{\perp}(\Omega)}{p - i\Omega}, \quad \nu_{\Omega} = qa_0 \frac{\xi_{\perp}(\Omega)}{p - i\Omega} - \xi_{\parallel}(\Omega). \quad (11)$$

Умножим (11) на сопряженные величины. Усредняя и полагая, как обычно,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \overline{\xi(\Omega) \xi^*(\Omega)} = w_{\xi}(\Omega); \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\alpha_{\Omega} \alpha_{\Omega}^*}{T} = w_{\alpha}(\Omega)$$

и так далее, будем иметь для спектра флюктуаций амплитуды  $w_{\alpha}$  и частоты  $w_{\xi}^*$ :

$$w_{\alpha}(\Omega) = \frac{1}{4a_0^2 \omega_0^2 p^2 + \Omega^2} [w_{\xi}(\omega_1 + \Omega) + w_{\xi}(\omega_1 - \Omega)], \quad (12)$$

$$\begin{aligned} w_{\nu}(\Omega) &= \frac{1}{4a_0^2 \omega_0^2} [w_{\xi}(\omega_1 + \Omega) + w_{\xi}(\omega_1 - \Omega)] + \\ &+ \frac{1}{4a_0^2 \omega_0^2 p^2 + \Omega^2} [w_{\xi}(\omega_1 + \Omega) + w_{\xi}(\omega_1 - \Omega)] + \\ &+ \frac{1}{4a_0^2 \omega_0^2 p^2 + \Omega^2} [w_{\xi}(\omega_1 + \Omega) - w_{\xi}(\omega_1 - \Omega)], \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\Delta = qa_0$  и  $w_{\xi}(\omega)$  — спектр функции  $\xi(t)$ .

Первый член в выражении для  $w_{\nu}(\Omega)$  обусловлен непосредственным действием флюктуаций на частоту колебаний, второй — действием на частоту через амплитудные флюктуации из-за неизохронности генератора, а третий вызван корреляцией между амплитудными и частотными флюктуациями. Как видно, корреляционный спектр не равен тождественно нулю лишь при неравномерном спектре  $w_{\xi}(\omega)$  около частоты колебаний  $\omega_1$ . Для  $\Omega=0$  спектральная плотность корреляционного спектра всегда равна нулю. Этот результат физически очевиден, если учесть, что воздействие ортогональных сил  $\xi_{\parallel}(t)$  и  $\xi_{\perp}(t)$  в системе (8) приводит к увеличению синфазных компонент в  $\nu(t)$  при  $\Omega \rightarrow 0$ . При гладком спектре  $\xi(t)$ , когда  $w_{\xi}(\omega_1 \pm \Omega) = w_{\xi}(\omega_1)$ ,

\* В статье функции спектральных плотностей отнесены к частоте  $F$ . Однако для сокращения записи в дальнейшем они пишутся с аргументом  $\Omega = 2\pi F$  и  $\omega = 2\pi f$ .

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(\Omega) &= \frac{1}{2\omega_0^2 a_0^2} \frac{\omega_\xi(\omega_1)}{P^2 + \Omega^2}, \\ \omega_\nu(\Omega) &= \frac{\omega_\xi(\omega_1)}{2\omega_0^2 a_0^2} + \Delta^2 \omega_\alpha(\Omega). \end{aligned} \quad (14)$$

Выражение для  $\omega_\xi$  зависит от вида схемы. Рассмотрим генератор с контуром в аноде, для которого  $\xi = \frac{1}{L} \frac{d}{dt} \xi_0 + \omega_0^2 \xi_1 + \omega_0^2 \xi_2$ . Спектр тепловой ЭДС  $\xi_0$  равен  $\omega_0(\omega) = 4ru(\omega)$ , где  $u(\omega) = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$ .

Спектр производной  $\frac{d\xi_0}{dt}$ , как известно, будет  $\omega^2 \omega_0(\omega)$ . Для спектра дробового тока  $\xi_1$  принимается обычно среднее значение за период, близкое к  $\omega_1(\omega) = 2eI_0\gamma_1$ , где  $I_0$  — постоянная составляющая тока анода,  $\gamma_1$  — коэффициент депрессии и  $e$  — заряд электрона.

Спектр фликкер-тока, как известно, равен  $\omega_2(\omega) = I^2 \gamma_2 \zeta(\omega)$ , где  $I$  — ток анода,  $\gamma_2$  — коэффициент депрессии и  $\zeta(\omega)$  — некоторая функция, имеющая вид  $\zeta(\omega) = m\omega^{-\lambda}$ , где величина  $m$  и показатель  $\lambda$  зависят от индивидуальных свойств лампы; обычно  $1 \leq \lambda \leq 2$  и  $m$  такое, что  $\omega_2(\omega)$  становится много меньше дробовых шумов уже для частот  $\Omega/2\pi \cdot 10^3 - 10^4$  гц и выше (см., например, [16]). Так как все случайные функции  $\xi_0, \xi_1, \xi_2$  независимы, то спектральная плотность процесса  $\xi$  находится простым суммированием спектров составляющих, т. е.  $\omega_\xi(\omega) = \frac{\omega^2}{L^2} \omega_0(\omega) + \omega_0^4 \omega_1(\omega) + \omega_0^4 \omega_2(\omega)$ . Подставляя  $\omega_\xi(\omega)$  в (12), (13) и учитывая, что для генераторов радиочастот  $\omega_2(\omega_1) = 0$ , получим общее выражение для спектров  $\alpha$  и  $\nu$ , в которые не входит спектр фликкер-шума. Полагая в этом выражении  $\omega_0 = 4kTr$  ( $\hbar\omega \ll kT$ ),  $a_0^2 r = 2P$  и  $a_0 = I_1 Q$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(\Omega) &= \frac{\omega_0^2}{Q^2} \left[ \frac{kT}{P} + \frac{eI_0\gamma_1}{I_1^2} \right] \frac{1}{P^2 + \Omega^2}, \\ \omega_\nu(\Omega) &= \frac{\omega_0^2}{Q^2} \left[ \frac{kT}{P} + \frac{eI_0\gamma_1}{I_1^2} \right] \left[ 1 + \frac{\Delta^2}{P^2 + \Omega^2} \right] + \frac{\Omega^2}{P^2 + \Omega^2} \frac{4\omega_1 \Delta}{Q^2} \frac{kT}{P}, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $P$  — мощность генератора,  $I_2$  — амплитуда первой гармоники тока анода.

Таким образом, в рамках рассматриваемой теории фликкер-шум не влияет ни на частотные, ни на амплитудные флюктуации радиочастотных колебаний. (В этом также еще раз можно убедиться из (7), где интеграл, учитывающий фликкер-шум,  $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \omega_0^2 \xi_2 \frac{\sin \psi}{\cos \psi} d\psi$  практически равен нулю, так как для радиочастотных генераторов  $\xi_2(t)$  много медленнее, чем  $\sin \psi$ ). Между тем, физически очевидно, что фликкер-шум должен непосредственно влиять, по крайней мере, на амплитудные флюктуации низкой частоты.

Нетрудно видеть из (15), что спектральные плотности флюктуаций частоты и амплитуды пропорциональны отношению мощности теплового и дробового шумов, выделяемых на контуре, к мощности колебания. Действительно, заменяя  $I_1^2$  через  $\frac{2P}{R_1}$ , где  $R_1$  — активный импеданс контура и  $\omega_0^2/Q^2 = \Delta f^2 4\pi^2$ , получим, полагая для простоты  $\Delta = 0$ ,

$$\omega_\nu(\Omega) = \Delta f \pi^2 \left( \frac{4kT\Delta f + 2eI_0\gamma_1 R_1 \Delta f}{P} \right).$$

После того, как определены спектры  $\alpha(t)$  и  $\nu(t)$ , вопрос о ширине линии решается с помощью результатов, полученных в цитированных выше работах.

### 5. НЕСТАЦИОНАРНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

В действительности, в ламповом генераторе функция  $\xi(t)$  состоит из стационарной части, связанной с тепловыми шумами  $\xi_0$ , и периодически нестационарной, связанной с дробовыми шумами и фликкер-шумом  $\xi_2$ . Так как нас интересует влияние периодической нестационарности, то для упрощения выкладок мы положим, что  $\xi_0 \equiv 0$ . Вследствие линейности флюктуационных уравнений (8) и независимости дробовых и тепловых шумов, это упрощение не скажется на результатах, и в случае необходимости соответствующие члены на основании предыдущих формул стационарного случая могут быть просто добавлены в окончательные выражения. Итак, положим  $\xi = D_1(\xi_1 + \xi_2)$ . Для определенности расчета рассмотрим схему генератора с контуром в аноде, тогда  $\xi = \omega_0^2 i(t) = \omega_0^2(\xi_1 + \xi_2)$ . Спектральная плотность шумового тока при данном токе  $I$  анода лампы равна  $w_i = 2Ie\gamma_1 + I^2\gamma_2\zeta(\omega)$ . Будем считать в первом приближении, что  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  не зависят от  $I$ . Известно, что  $\bar{\xi}_2^2 = \int_0^\infty I^2\gamma_2\zeta(\omega) d\omega$  расходится, так как  $\zeta(\omega) \rightarrow \infty, \omega \rightarrow 0$ , т.е.  $\xi_2(t)$  — нестационарный процесс [16]. Однако, отбрасывая в  $\xi_2(t)$  все частоты ниже некоторой произвольно малой частоты  $\delta$ , мы получим стационарный процесс, который и будем рассматривать.

Поскольку средний статистический квадрат полного шумового тока зависит от времени периодически, то можно записать

$$\bar{i}^2 = \bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2 = \frac{I(t)}{I_s} \int_0^F 2eI_s\gamma_1 dF + \frac{I^2(t)}{I_s^2} \int_\delta^\infty I_s^2\gamma_2\zeta(\omega) dF = u_1^2\bar{\xi}_{10}^2 + u_2^2\bar{\xi}_{20}^2,$$

где  $u_1 = \sqrt{I/I_1}$ ;  $u_2 = \frac{I}{I_1}$  и  $I_s$  — максимальное значение тока анода лампы при колебаниях. Отсюда, для самой случайной функции  $i(t)$  можно записать

$$i(t) = \xi_1 + \xi_2 = u_1\xi_{10} + u_2\xi_{20},$$

где  $\xi_{10}$  и  $\xi_{20}$  — стационарные функции со спектральными плотностями, равными соответственно

$$w_{10} = 2I_s e\gamma_1; \quad w_{20} = I_s^2\gamma_2\zeta(\omega). \tag{16}$$

Функции  $\xi_{k0}$  ( $k = 1, 2$ ) определены лишь с точностью до постоянных множителей. Однако это не может сказаться на результатах, так как последние определяются лишь самими функциями  $\xi_k$  и  $\xi_{k0}$ . Уравнение (8), при учете нестационарности, принимает вид:

$$\frac{d\alpha}{dt} = p\alpha - \frac{\omega_0}{a_0} (u_1\xi_{10} + u_2\xi_{20}) \sin \omega_1 t, \tag{17}$$

$$\nu(t) = qa_0\alpha - \frac{\omega_0}{a_0} (u_1\xi_{10} + u_2\xi_{20}) \cos \omega_1 t. \tag{18}$$

Неизвестные функции  $u_k$  определяются характером нелинейной характеристики системы. Так, если ток анода  $I = \Phi(v_g)$ , то  $u_2 = \frac{\Phi(v_g)}{\Phi(v_{g0})}$ , причем



напряжение на сетке определенным образом связано с решением  $x(t)$  уравнения (3). В простейшем случае  $u_2 \approx \sin \psi$ . Положим для общности

$$u_1 = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} g_n e^{i\omega_1 n t}; \quad u_2 = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_2 n t}, \quad (19)$$

где  $c_n = I_n / I_s = |c_n| e^{i\beta_n}$  — комплексные коэффициенты гармоник  $I_n$  тока анода. (Следует, однако, заметить, что в рамках первого приближения, в котором ищется решение дифференциального уравнения, достаточно ограничиться для  $u_2$  выражением, вытекающим из этого приближения, т. е. положить в (19) все  $c_n = 0$  при  $n > 1$ .) Фазовые углы  $\beta_n$  гармоник тока анода определяются конкретным видом схемы.

Для идеализированного генератора фаза первой гармоники тока  $\beta_1$  равна  $\frac{\pi}{2}$ . Как показывают многочисленные работы (см., например, [17]), в реальном генераторе, из-за сдвигов фаз в различных цепях генератора,  $\beta_1$  может заметно отличаться от  $\frac{\pi}{2}$ , поэтому мы примем в общем случае  $\beta_1 \neq \frac{\pi}{2}$ .

Для нахождения спектра  $a(t)$  положим  $\xi_{k0}(\Omega) = \int_0^T \xi_{k0} e^{-i\Omega t} dt$ ;  $k = 1, 2$ . Вычисляя затем спектр правой части (17), нетрудно получить, согласно (11),

$$\alpha_\Omega = \frac{i}{4a_0} \frac{\omega_0}{p - i\Omega} \sum_{-\infty}^{+\infty} n \{ g_n \xi_{10}(\Omega - (n-1)\omega_1) - g_n \xi_{10}(\Omega - (n+1)\omega_1) + \\ + c_n \xi_{20}(\Omega - (n-1)\omega_1) - c_n \xi_{20}(\Omega - (n+1)\omega_1) \}, \quad (20)$$

где  $\xi_{k0}(\Omega - (n \pm 1)\omega_1)$  — Фурье-спектр функции  $\xi_{k0}(t)$ . После умножения (20) на сопряженную величину и усреднения получим

$$\omega_\alpha(\Omega) = \frac{\omega_0^2}{16a_0^2} \frac{1}{p^2 + \Omega^2} \sum \{ g_n g_n^* \omega_{10}(\Omega - (n-1)\omega_1) + g_n g_n^* \omega_{10}(\Omega - (n+1)\omega_1) - \\ - g_n g_{n-2}^* \omega_{10}(\Omega - (n-1)\omega_1) - g_n g_{n+2}^* \omega_{10}(\Omega - (n+1)\omega_1) + \\ + c_n c_n^* \omega_{20}(\Omega - (n-1)\omega_1) + c_n c_n^* \omega_{20}(\Omega - (n+1)\omega_1) - \\ - c_n c_{n-2}^* \omega_{20}(\Omega - (n-1)\omega_1) - c_n c_{n+2}^* \omega_{20}(\Omega - (n+1)\omega_1) \}. \quad (21)$$

Для дробового шума нужно положить  $\omega_{10}(\Omega - (n \pm 1)\omega_1) = \omega_{10} = \text{const}$ . Для фликкер-шума у генератора с частотой колебаний выше звуковой можно считать  $\omega_{20}(\Omega - (n \pm 1)\omega_1) = 0$  при  $n \pm 1 = 1, 2, \dots$ . Нетрудно убедиться, что получающиеся при этом в (21) выражения  $\sum 2g_n g_n^* - g_n g_{n-2}^* - g_n g_{n+2}^*$  и  $2c_1 c_1^* - c_1 c_1 - c_1^* c_1^*$  равны соответственно  $16\overline{u_1^2 \sin^2 \omega_1 t} = 16\overline{u_2^2 \sin^2 \omega_1 t}$  и  $4|c_1|^2 \sin^2 \beta_1$ , где волнистая черта обозначает усреднение по времени. При этом вместо (21) получим

$$\omega_\alpha(\Omega) = \omega_{10} \frac{\omega_0^2}{Q^2} \frac{\overline{u_2 \sin^2 \omega_1 t}}{p^2 + \Omega^2} + \omega_{20}(\Omega) \frac{\omega_0^2}{4a_0^2} \frac{c_1^2 \sin^2 \beta_1}{p^2 + \Omega^2}. \quad (22)$$

Поскольку  $\overline{u_2 \sin^2 \omega_1 t} = \frac{1}{2} c_0 - \frac{1}{4} c_2 \cos \beta_2$ ,  $c_0 = \frac{I_0}{I_s}$ ,  $c_1 = \frac{I_1}{I_s}$ , . . . .  
 $a_0 = I_1 Q$ , то, учитывая (16), получим окончательно

$$\omega_x(\Omega) = \frac{\omega_0^2}{Q^2} \frac{e\gamma_1 \frac{I_0}{I_1^2} - \frac{1}{2} \frac{I_2}{I_1^2} e\gamma_1 \cos \beta_2}{p^2 + \Omega^2} + \frac{\omega_0^2}{Q^2} \frac{\gamma_2 \sin^2 \beta}{4} \frac{\zeta(\Omega)}{p^2 + \Omega^2}. \quad (23)$$

Практически  $\sin^2 \beta = 1$ . Первый член (23) определяется дробовыми шумами и отличается от ранее полученного выражения (случай стационарности) членом, учитывающим влияние второй гармоники. Второй член (23) определяется фликкер-шумом и обусловлен периодической нестационарностью. Как видно из (23), низкочастотные флюктуации амплитуды не зависят от мощности генератора, а зависят лишь от шумовых параметров лампы и качества контура. Найдем теперь спектр флюктуаций частоты. Вычисляя спектр второго члена правой части (18), учитывая найденный Фурье-спектр для (20), нетрудно получить

$$\begin{aligned} \omega_x \Rightarrow & \frac{\omega_0}{4a_0} \sum \left\{ \frac{i(\Delta + \Omega) - p}{p - i\Omega} g_n \xi_{10}(\Omega - (n-1)\omega_1) - \right. \\ & - \frac{i(\Delta - \Omega) + p}{p - i\Omega} g_n \xi_{10}(\Omega - (n+1)\omega_1) + \frac{i(\Delta + \Omega) - p}{p - i\Omega} c_n \xi_{20}(\Omega - (n-1)\omega_1) - \\ & \left. - \frac{i(\Delta - \Omega) + p}{p - i\Omega} c_n \xi_{20}(\Omega - (n+1)\omega_1) \right\}. \quad (24) \end{aligned}$$

Умножая (24) на  $v_n^*$ , усредняя и учитывая также, что  $\omega_{10}(\Omega - (n+1)\omega_1) = \omega_{10} = \text{const}$ , а  $\omega_{20}(\Omega - (n \pm 1)\omega_1) \neq 0$  лишь при  $n \pm 1 = 0$ , получим выражение для  $\omega_x(\Omega)$ , содержащее суммы  $\sum 2g_n g_n^* + g_n g_{n+2}^* + g_n g_{n-2}^*$  и  $\sum g_n g_{n+2}^* - g_n g_{n-2}^*$ . Можно показать, что первая сумма равна  $16\overline{u_1^2 \cos^2 \omega_1 t} = 16\overline{u_2^2 \cos^2 \omega_1 t} = 8\left(c_0 + \frac{1}{2} c_2 \cos \beta_2\right)$ , а вторая  $8\overline{u_1^2 \sin 2\omega_1 t} = 8\overline{u_2 \sin 2\omega_1 t}$ , тогда

$$\omega_x(\Omega) = \omega_{10} \frac{\overline{\omega_0^2 u_2 \cos^2 \omega_1 t}}{a_0^2} + \omega_{20}(\Omega) \frac{\omega_0^2 c_1^2 \cos^2 \beta_1}{4a_0^2} + \quad (25)$$

$$+ \left( \omega_{10} \frac{\omega_0^2}{Q^2} \frac{\overline{u_2 \sin^2 \omega_1 t}}{p^2 + \Omega^2} + \omega_{20}(\Omega) \frac{\omega_0^2 c_1^2 \sin^2 \beta_1}{4a_0^2 (p^2 + \Omega^2)} \right) \Delta^2 + \omega_{20}(\Omega) \frac{\omega_0^2 c_1^2 \sin 2\beta_1}{4a_0^2} \frac{p\Delta}{p^2 + \Omega^2}.$$

Здесь первый и второй члены представляют флюктуации частоты, вызванные дробовым и фликкер-шумом соответственно; третий, четвертый и пятый члены обусловлены влиянием амплитудных флюктуаций на частоту, вследствие неизохронности генератора. При  $q=0$  эти члены исчезают. Учитывая (22) и (16), получим

$$\begin{aligned} \omega_x(\Omega) = & \frac{\omega_0^2}{Q^2} \left( e \frac{I_0}{I_1^2} \gamma_1 - \frac{1}{2} e \frac{I_2}{I_1^2} \cos \beta_2 \right) + \frac{\omega_0^2}{Q^2} \frac{\gamma_2 \cos^2 \beta_1}{4} \zeta(\Omega) + \\ & + \omega_x(\Omega) \Delta^2 + \frac{\omega_0^2 \gamma_2 p \cos^2 \beta_1}{4Q^2} \frac{\zeta(\Omega)}{(p^2 + \Omega^2)} \Delta. \quad (26) \end{aligned}$$

Из выражений (25) и (26) видно, что фликкер-шум влияет на флюктуации частоты не только через амплитудные флюктуации при неизохрон-

ности ( $q \neq 0$ ), но и непосредственно. Это непосредственное действие имеет место лишь при несовпадении частоты колебаний с частотой контура, когда  $\beta_1$  отличается от  $\frac{\pi}{2}$  на некоторую величину  $\rho_1$ . В реальных генераторах  $\rho_1$  может составлять единицы градусов, т. е.  $\cos^2 \rho_1 = \sin^2 \rho_1 \ll 10^{-2}$ .

Мы показали выше, что на спектральную ширину влияют те компоненты шума, частоты которых совпадают с  $\omega_1$  или близки к ней. То же самое имеет место и при воздействии нестационарного шума. Однако спектр этого шума будет иметь вид, показанный на рисунке пунктиром, т. е. спектр фликкер-шума благодаря модуляции переносится на частоту колебания. При этом возникает жесткая связь между фазой компонент шума и фазой самого колебания. Результатом этого является установленная здесь зависимость флюктуаций частоты и амплитуды от фазовых соотношений колебательных токов в генераторе.

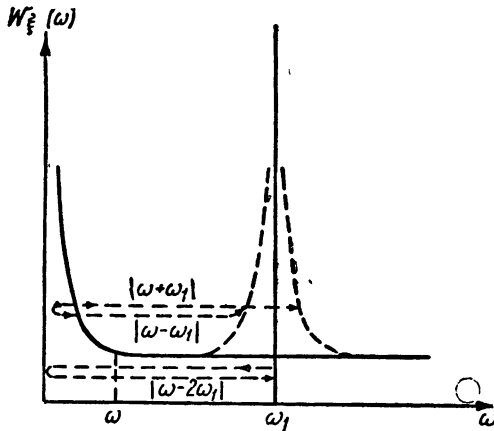


Рис. 1

Для более четкого представления условий в генераторе, при которых имеет место влияние фликкер-шума на частоту колебаний, рассмотрим схему генератора с контуром в аноде, причем в цепи сетки лампы добавим четырехполюсник, сдвигающий фазу напряжения на сетке на угол  $\rho$ . Флюктуационный ток анода  $\xi_2(t)$  фликкер-шума запишем в виде  $\xi_2(t) = I E(t)$ , где  $E(t)$  — медленная стационарная случайная функция, имеющая спектральную плотность  $\gamma_2(\omega)$  (это представление  $\xi_2$  вытекает из приведенного выше, так как  $\xi_2 = u_2 \xi_{20} = \frac{I}{I_s} I_s E(t) = I E(t)$ ). Ток  $\xi_2(t)$  можно заменить некоторым эквивалентным шумовым напряжением, включенным на сетку и равным  $v_{gm} = S^{-1} \xi_2(t) = S^{-1} I E(t)$ . Поскольку  $I$  меняется с частотой колебаний, то эквивалентное шумовое напряжение является просто синусоидальным колебанием, промодулированным шумом  $E(t)$ . Для нашей цели достаточно ограничиться для характеристики лампы линейным приближением  $I = S v + I_0$ . При этом уравнение колебаний тока в контуре для рассматриваемой схемы будет

$$x + \omega_0^2 x = \omega_0^2 S v_g - \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 (I_0 + S v_g) E(t). \quad (27)$$

Положим  $x = a \cos \psi$ ;  $\dot{x} = -a \omega_0 \sin \psi$ , тогда  $v_g = -M a \omega_0 \sin(\psi + \rho) = -x M \omega_0 \sin \rho + \dot{x} M \cos \rho$ . Подставляя это в (27) и применяя (7), получим, полагая  $q \approx 0$ ,

$$\frac{d\alpha}{dt} = p\alpha - \frac{\omega_0}{2\pi a_0} \int_0^{2\pi} [I_0 E(t) - M \omega_0 S E(t) \cos \rho \sin \psi] \sin \psi d\psi,$$

$$v(t) = -\frac{\omega_0}{2\pi a_0} \int_0^{2\pi} [I_0 E(t) - Ma\omega_0 S E(t) \sin \rho \cos \psi] \cos \psi d\psi.$$

Интегрирование члена  $I_0 E(t) \cos \psi$  дает нуль, так как  $E(t)$  много медленнее  $\cos \omega_0 t$ . Интегрируя вторые члены и принимая во внимание, что  $Ma\omega_0 S$  равно  $I_1$  — амплитуде первой гармоники анодного тока, получим

$$\frac{da}{dt} = p\alpha + \frac{\omega_0}{2a_0} I_1 E(t) \cos \rho, \tag{28}$$

$$v(t) = \frac{\omega_0}{2a_0} I_1 E(t) \sin \rho \quad (q \approx 0). \tag{29}$$

Из (29) легко найти

$$\omega_{v,2} = \frac{\omega_0^2}{Q^2} \frac{\gamma_2 \sin^2 \rho}{4} \zeta(\Omega). \tag{30}$$

Это полностью совпадает с соответствующим членом полученного выше выражения (26), если положить  $\beta_1 = \pi/2 - \rho$ , что приблизительно следует из общих фазовых соотношений в генераторе для рассмотренной схемы. Очевидно, что  $\rho$  является добавочным к  $\pi/2$  сдвигом фаз между током анода и током в контуре и в общем случае определяется отклонением частоты колебаний от резонансной, т. е. величиной поправки  $B_1$  за счет каких бы факторов она не появлялась. Поскольку  $\rho \approx -2 \frac{Q}{\omega_0} B_1$ , то, согласно (30),

$$\omega_{v,2} \approx B_1^2 \gamma_2 \zeta(\Omega). \tag{31}$$

Если поправка  $B_1$  зависит от амплитуды, то  $q \neq 0$  и в (31) появляется добавочная спектральная плотность от амплитудных флюктуаций, пропорциональная  $\Delta^2$ .

## 6 ШИРИНА И ФОРМА ЛИНИИ, СВЯЗАННАЯ С ФЛИККЕР-ШУМОМ

Выражение (26) позволяет определить как техническую, так и естественную ширину линии генератора. Естественная ширина линии определяется значением  $\omega_v(F)$  при  $F > \frac{1}{2\pi} \omega_\phi$ , т. е. спектром  $\omega_{v,1}$ , связанным с дробовыми и тепловыми шумами лампы. Определение спектральной линии по значению  $\omega_{v,1}$  эквивалентно определению формы линии по ее крыльям [8]. Крылья линии не могут исказиться медленной частотной модуляцией, приводящей лишь к уширению центральной части линии [8, 3] и создающей, следовательно, техническую ширину линии.

Техническая ширина линии определяется величиной полного спектра  $\omega_v(F)$  вблизи  $F=0$ , обусловленного в рассматриваемом случае в основном фликкер-шумом. В соответствии с экспериментальными и теоретическими результатами для  $\omega_v(F)$  мы должны положить  $\omega_v(\Omega) \sim \Omega^{-2}$ , что приводит, однако, при вычислении спектральной ширины линии к расходящимся интегралам. Мы примем, что  $\zeta(\Omega) = \frac{m}{\delta^2 + \Omega^2}$ , где  $\delta$  очень мало. Выбор конечного  $\delta$  означает по существу исключение из рассмотрения частот, меньших  $\frac{\delta}{2\pi}$   $\mu\text{ц}$ . Тогда, согласно (26),

$$\omega_v(\Omega) \approx \omega_{v,2}(\Omega) = \frac{b}{\delta^2 + \Omega^2},$$

где  $b = \frac{\omega_1^2}{4Q^2} m\gamma_2 \sin^2 \rho$ , причем  $b \gg \delta$ . Согласно [8], это приводит для дрейфа фазы к выражению

$$\chi(\tau) = \frac{b}{2\delta^3} (e^{-\tau\delta} - 1) + \frac{b}{2\delta^2} \tau.$$

В интервале  $0 \leq \tau \leq \delta^{-1}$  выражение  $\chi(t)$  может быть разложено по степеням  $\tau\delta$ . Ограничиваясь третьим членом разложения  $e^{-\tau\delta}$ , получим с достаточной точностью  $\chi(t) = \frac{b}{4\delta} \tau^2 = \bar{\nu}^2$ , где  $\bar{\nu}^2 = \int_0^{\infty} \omega_{\nu 2} dF = \frac{b}{4\delta}$ . Если распределение  $\nu(t)$  гауссовское, то для формы спектральной линии колебания можно воспользоваться известным соотношением, приводящим к доплеровской форме линии

$$W(f) = \frac{a_0^2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\bar{\nu}^2}{2} \tau^2} \cos(\omega_1 - \omega) \tau d\tau = \frac{a_0^2 \sqrt{2\pi}}{\sqrt{\bar{\nu}^2}} e^{-\frac{(\omega_1 - \omega)^2}{2\bar{\nu}^2}}.$$

Ширина линии на уровне  $\frac{1}{2,7}$  отсюда равна

$$\Delta F = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega_1}{Q} \sqrt{\frac{m\gamma_2}{2\delta}} |\sin \rho| = B_1 \sqrt{\frac{m\gamma_2}{2\delta\pi^2}}. \quad (32)$$

Для усилительных ламп в среднем  $m\gamma_2 \approx 10^{-11}$  гц [16]. Пусть  $\delta = \frac{2\pi}{100}$ , тогда  $\Delta F = \frac{f_1}{Q} \cdot 10^{-5} \sin \rho$ . При  $f_1 = 10^7$  гц;  $Q = 100$ ;  $\sin \rho = 10^{-2}$ ;  $\Delta F = 0,01$  гц.

Ширина линии (32), очевидно, будет осуществляться за время порядка  $\frac{2\pi}{\delta}$  сек. В рассматриваемом случае для ее наблюдения необходимо, следовательно, измерение за время порядка 1,5 мин.

Полученные результаты показывают, что спектр флюктуаций амплитуды в низкочастотной области целиком определяется спектром фликкер-шума, а спектр флюктуаций частоты определяется фликкер-шумом только при наличии сдвигов фаз в генераторе между током анода и напряжением на нагрузке. Таким образом, наблюдаемый сильный рост флюктуаций амплитуды и частоты к низким частотам получает теоретическое объяснение и вполне совпадает с характером поведения спектра фликкер-шума. Выражения (26), (31) и (32) показывают, что спектральная ширина линии, в противоположность ранее полученным результатам, не зависит от мощности колебаний генератора, а зависит лишь от параметров схемы и фликкер-шумовых качеств лампы.

Выражаю глубокую благодарность И. Л. Берштейну и Г. С. Горелику за интерес к работе и весьма существенную критику при ее выполнении, а также А. Н. Малахову за ценные замечания при чтении рукописи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. Л. Берштейн. ДАН СССР, 1938, 20, 1, 11.
2. И. Л. Берштейн. ДАН СССР, 1949, 68, 469. Известия АН СССР, сер. физ., 1950, 14, 2, 145.
3. Г. С. Горелик. Известия АН СССР, сер. физ., 1950, 14, 4, 187. ЖЭТФ, 1950, 20, 4.
4. С. М. Рытов. ЖЭТФ, 1955, 29, 3, 304, 315.
5. D. Middleton. Phil. Mag., 1951, 42, 330, Quart. Appl. Math., 1952, 9, 4, 337; 10, 1, 35.
6. А. Н. Малахов. Диссертация, ГГУ, 1953. ЖЭТФ, 1956, 30, 5, 884.

7. L. Stewart. Proc. I.R.E., 1954, 42, 10, 1939.
8. В. С. Троицкий. Радиотехника и электроника, 1956, 1, 6, 818.
9. М. Е. Жаботинский. ЖЭТФ, 1954, 26, 758.
10. Л. Гудзенко. Радиотехника и электроника (в печати).
11. И. Л. Берштейн. ДАН СССР, 1956, 106, 3, 453.
12. В. С. Троицкий, В. В. Хрулев. Радиотехника и электроника, 1956, 1, 6, 832.
13. В. С. Троицкий. Радиотехника и электроника (в печати).
14. Transact. I.R.E., ED-1, 1954, 4.
15. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1955.
16. А. Н. Малахов. Радиотехника и электроника, 1957, 2, 4; 1958, 3, 5.
17. Б. К. Шембель. Стабилизация частоты радиопередающих устройств, ГТТИ, 1934.
18. А. Н. Малахов. Радиотехника и электроника, 1957, 2, 10.
19. П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, В. И. Тихонов. ЖЭТФ. 1955. 28, 5, 509.

Исследовательский радиофизический  
институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
5 октября 1957 г.