ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

№ 1 РАДИОФИЗИКА 1958

# ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЛИНЗ ЛЮНЕБЕРГА

*В. Г. Мышкин*

Решена строгая электродинамическая задача об излучении антенны, построенной на основе модифицированной цилиндрической линзы Люнеберга. Решение выражается через вырожденные гипергеометрические и ганкелевы функции. Получены формулы для поля в частном случае обыкновенной линзы Люнеберга. В практических расчетах вместо входящих в решение специальных функций могут быть использованы их асимптотические представления.

Методами геометрической оптики может быть показано, что сферический образец неоднородного диэлектрика с показателем преломления, распределенным центрально-симметрично по закону

$$n(r) = \sqrt{2 - \left(\frac{r}{a}\right)^2} \tag{1}$$

($a$ — радиус сферы, $r$ — сферическая координата текущей точки), будет вести себя как линза, преломляющая пучок лучей точечного источника, лежащего на поверхности сферы (в точке $r=a$), в параллельный пучок лучей. Такими же свойствами обладает двумерный аналог сферической линзы, т. е. цилиндрическая линза с аксиально-симметричным распределением показателя преломления, описываемым той же формулой (1), по отношению к линейному источнику излучения, лежащему вдоль образующей цилиндра. Такие линзы получили название линз Люнеберга.

Важным достоинством линз этого типа является то, что они могут служить весьма удобной основой для построения антенн сантиметрового диапазона с быстрым широкоугольным качанием луча [1]. Вследствие центральной или осевой симметрии распределения показателя преломления соответственно в сферической и цилиндрической линзах геометрическим местом фокусов в первом случае будет сфера, во втором — окружность. Движение только лишь одного облучателя по поверхности сферы или по окружности обеспечивает качание луча антенны без изменения ее диаграммы направленности.

Быстрое механическое движение облучателя в принципе еще более легко осуществимо в антенне, построенной на основе так называемой модифицированной линзы Люнеберга [2]. В этом случае облучатель располагается внутри линзы на расстоянии $f$ от ее центра, а показатель преломления изменяется по закону

$$n(r) = \frac{1}{f}\sqrt{a^2 + f^2 - r^2}. \tag{2}$$

На практике расчет ближнего поля антенн с линзой Люнеберга проводится на основе оптико-геометрической теории, что является допустимым, так как при создании таких антенн стараются выполнить условие $a \gg \lambda$, означающее, что вариация показателя преломления на отрезке, равном длине волны, является малой. Поле антенны в волновой зоне рассчитывается исходя из значений поля в ее раскрыве обычным методом — с помощью принципа Гюйгенса—Кирхгофа [1].

Однако, как известно, одно отмеченное выше условие еще не является достаточным для безоговорочного применения оптико-геометрической теории. Второе условие, содержащее требование равномерной малости градиента поля, в случае линзы Люнеберга как раз оказывается нарушенным. Это обстоятельство выражается в том, что оптико-геометрический расчет дает бесконечные значения плотности потока энергии на краях излучающего раскрыва антенны [1].

Отмеченные трудности оптико-геометрической теории линз Люнеберга ставят вопрос о построении строгой электродинамической теории этих линз. Решение одной из задач в такой постановке и является целью настоящей работы.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ В СЛУЧАЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ЛИНЗЫ ЛЮНЕБЕРГА

В общем задача об антенне Люнеберга сводится к нахождению поля, создаваемого электрическими токами с заданной плотностью амплитуды $\vec{j}(r)$ в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(r)$, определенным образом зависящей от координат.

Пусть в конкретном случае в цилиндрической системе координат диэлектрическая проницаемость зависит лишь от координаты $r$, а вектор $\vec{j}$ имеет лишь одну компоненту $j_z = j(r, \varphi, z)$.

Пусть далее функция $j(r, \varphi, z)$ не зависит от координаты $z$. В этом случае вектор-потенциал имеет лишь одну компоненту $A_z = A(r, \varphi)$, также не зависящую от переменной $z$ и удовлетворяющую уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} + k^2\varepsilon(r)A = -\frac{4\pi}{c}j. \tag{3}$$

Для модифицированной линзы Люнеберга, построенной из диэлектрика без потерь, функция $\varepsilon(r)$, согласно (2), будет иметь вид:

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} \dfrac{a^2 - r^2}{f^2} + 1 & \text{при } r \leqslant a, \\ 1 & \text{при } r \geqslant a. \end{cases} \tag{4}$$

При этом предположим, что линза облучается нитью синфазного тока, проходящей через точку с координатами $r = f$, $\varphi = \pi$. Таким образом, функция плотности тока имеет вид:

$$j(r, \varphi) = \frac{\dot{I}}{f}\,\delta(f - r)\,\delta(\pi - \varphi), \tag{5}$$

где $\dot{I}$ — величина амплитуды тока.

Вектор-потенциалы внутри линзы ($A^{(1)}$) и вне ее ($A^{(2)}$) на поверхности линзы должны удовлетворять граничным условиям

$$A^{(1)} = A^{(2)}, \quad \frac{\partial A^{(1)}}{\partial r} = \frac{\partial A^{(2)}}{\partial r} \quad \text{при } r = a. \tag{6}$$

Представляя функции $j(r, \varphi)$ и $A(r, \varphi)$ в виде разложения в ряды Фурье по косинусам с амплитудами $j_m$ и $A_m$ и используя уравнение (3), получим уравнения для амплитуд $A_m$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA_m}{dr}\right) + \left[k^2\varepsilon(r) - \frac{m^2}{r^2}\right]A_m = -\frac{4\pi}{c}j_m, \tag{7}$$

$$m = 0, 1, 2 \ldots .$$

Найдем прежде всего собственные функции задачи, т. е. решения однородных уравнений

$$\rho^2 \frac{d^2 A_m^*}{d\rho^2} + \rho \frac{d A_m^*}{d\rho} + [-\alpha^2 \rho^4 + \alpha^2 (1 + \beta^2) \rho^2 - m^2] A_m^* = 0 \tag{8}$$

$$\text{при } 0 \leqslant \rho \leqslant 1,$$

$$\rho^2 \frac{d^2 A_m^*}{d\rho^2} + \rho \frac{d A_m^*}{d\rho} + [\alpha^2 \beta^2 \rho^2 - m^2] A_m^* = 0 \tag{9}$$

$$\text{при } \rho > 1,$$

получающихся из уравнения (7) после подстановки в него функции (4) с учетом обозначений

$$\frac{r}{a} = \rho, \ \frac{ka^2}{f} = \alpha, \ \frac{f}{a} = \beta. \tag{10}$$

Рассмотрим уравнение (8) для области, лежащей внутри линзы. Путем замены переменных

$$\rho^2 = z, \ A_m^* = \frac{u_m}{\sqrt{z}} \tag{11}$$

получим уравнение, которое после введения обозначений

$$m = 2\mu, \quad x = \alpha z, \quad 4\varkappa = \alpha (1 + \beta^2) \tag{12}$$

приводится к уравнению

$$4x^2 u_m'' = [x^2 - 4\varkappa x + 4\mu^2 - 1] u_m,$$

имеющему известные решения в виде функций Уиттекера.

Удобнее, однако, с помощью известной замены [3]

$$u_m = e^{-x/2} x^{b/2} y_m \tag{13}$$

перейти к уравнению

$$x y_m'' + (b - x) y_m - \gamma y_m = 0 \tag{14}$$

для вырожденных гипергеометрических функций, в котором параметры $\gamma$ и $b$ имеют выражения

$$\gamma = \frac{1}{2} + \mu - \varkappa, \quad b = 1 + 2\mu. \tag{15}$$

Фундаментальными решениями этого уравнения являются функции $\Phi(\gamma, b; x)$ и $\Psi(\gamma, b; x)$ [3] с вронскианом

$$W(x) = -\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(\gamma)} e^x x^{-b}. \tag{16}$$

С учетом замен переменных (11), (12) и (13)

$$A_m^* = \alpha^{b/2} \rho^m \exp\left(-\frac{\alpha\rho^2}{2}\right) y_m(\alpha\rho^2). \tag{17}$$

Поскольку общим решением уравнения (14) будет

$$y_m(x) = C_1' \Phi(\gamma, b; x) + C_2' \Psi(\gamma, b; x), \tag{18}$$

то общее решение уравнения (8), согласно (17) и (18), запишется в форме

$$A_m^* = C_1 \overline{A}_m^* + C_2 \overline{\overline{A}}_m^*, \tag{19}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \overline{A}_m^* &= \rho^m \exp\left(-\frac{\alpha\rho^2}{2}\right) \Phi(\gamma, b; \alpha\rho^2) \\ \overline{\overline{A}}_m^* &= \rho^m \exp\left(-\frac{\alpha\rho^2}{2}\right) \Psi(\gamma, b; \alpha\rho^2) \end{aligned}\right\}, \tag{20}$$

а $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные.

Найдем теперь решение неоднородного уравнения (7), взятого в виде

$$\rho^2 \frac{d^2 A_m}{d\rho^2} + \rho \frac{dA_m}{d\rho} + [-\alpha^2\rho^2 + \alpha^2(1+\beta^2)\rho^2 - m^2] A_m = h_m(\rho), \tag{21}$$

$$0 \leqslant \rho \leqslant 1,$$

где

$$h_m(\rho) = -\frac{4\pi}{c} j_m a^2 \rho^2 = -\frac{4(-1)^m I}{c\beta} \rho^2 \delta(\beta - \rho). \tag{22}$$

Общее решение этого уравнения записывается в форме

$$A_m = \int\limits_0^\rho [\overline{A}_m^*(\xi) \overline{\overline{A}}_m^*(\rho) - \overline{A}_m^*(\rho) \overline{\overline{A}}_m^*(\xi)] \frac{h_m(\xi)}{W_m(\xi)} d\xi + C_1 \overline{A}_m^*(\rho) + C_2 \overline{\overline{A}}_m^*(\rho), \tag{23}$$

где $W_m(\xi)$ — вронскиан фундаментальных решений (20), равный

$$W_m(\xi) = -2\alpha^{-m} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(\gamma)} \cdot \frac{1}{\xi}. \tag{24}$$

Подставляя (22) и (24) в (23) и учитывая, что из условия конечности решения в точке $\rho = 0$ необходимо положить $C_2 = 0$, получаем для области пространства внутри линзы:

$$A_m(\rho) = C_1 \rho^m \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha\rho^2\right) \Phi(\gamma, b; \alpha\rho^2) \tag{25}$$

$$\text{при } 0 \leqslant \rho \leqslant \beta,$$

$$\begin{gathered} A_m(\rho) = M[\Phi(\gamma, b; \alpha\beta^2) \Psi(\gamma, b; \alpha\rho^2) - \\ - \Phi(\gamma, b; \alpha\rho^2) \Psi(\gamma, b; \alpha\beta^2)] \rho^m \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha\rho^2\right) + \\ + C_1 \rho^m \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha\rho^2\right) \Phi(\gamma, b; \alpha\rho^2) \end{gathered} \tag{26}$$

$$\text{при } \beta < \rho \leqslant 1,$$

где

$$M = 2(-1)^m \frac{I}{c} \frac{\Gamma(\gamma)}{m!} \alpha^m \beta^{m+2} \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha\beta^2\right). \tag{27}$$

Коэффициенты Фурье для вектор-потенциала в области $\rho > 1$ даются решениями уравнения (9), удовлетворяющими условию излучения,

$$A_m(\rho) = C_1' H_m^{(2)}(\alpha\beta\rho), \quad \rho > 1. \tag{28}$$

Постоянные $C_1$ и $C_1'$, определяющиеся с помощью граничных условий (6), равны

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{M}{S_m'} \{\alpha\beta V_{\alpha\beta} H_m^{(2)\prime}(\alpha\beta) - [2\alpha W_{\alpha\beta} + (m - \alpha) V_{\alpha\beta}] H_m^{(2)}(\alpha\beta)\} \\ C_1' &= \frac{4(-1)^m}{S_m'} \cdot \frac{I}{\cdot} \beta^{m+2} \exp\left[\frac{\alpha}{2}(1 - \beta^2)\right] \Phi(\alpha\beta^2) \end{aligned}\right\}, \tag{29}$$

где

$$\left.\begin{aligned} V_{\alpha\beta} &= \Phi(\alpha\beta^2)\Psi(\alpha) - \Phi(\alpha)\Psi(\alpha\beta^2) \\ W_{\alpha\beta} &= \Phi(\alpha\beta^2)\Psi'(\alpha) - \Phi'(\alpha)\Psi(\alpha\beta^2) \\ S''_m &= [2\alpha\Phi'(\alpha) + (m-\alpha)\Phi(\alpha)]H_m^{(2)}(\alpha\beta) - \alpha\beta\Phi(\alpha)H_m^{(2)\prime}(\alpha\beta) \end{aligned}\right\}, \qquad (30)$$

причем для сокращения письма параметры вырожденных гипергеометрических функций опускаются.

Вектор-потенциал задачи находится с помощью (25)—(30) в виде

$$A(\rho, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(\rho)\cos m\varphi. \qquad (31)$$

При этом в члене с $m=0$ необходимо учитывать множитель $1/2$.

## 2. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ПОЛЯ В СЛУЧАЕ ОБЫКНОВЕННОЙ ЛИНЗЫ ЛЮНЕБЕРГА

Наиболее простым и легче реализуемым на практике является случай обыкновенной линзы Люнеберга, в котором источник излучения располагается на ее поверхности ($f=a$, $\beta=1$).

В этом случае выражения для коэффициентов Фурье вектор-потенциала легко получаются из формул (25)—(30), если положить в них $\beta=f/a=1$,

$$\left.\begin{aligned} A_m &= C_1\rho^m \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha\rho^2\right)\Phi(\gamma, b;\, \alpha\rho^2) \qquad \text{при } \rho \leqslant 1 \\ A_m &= C_1' H_m^{(2)}(\alpha\rho) \qquad \text{при } \rho \geqslant 1 \end{aligned}\right\}, \qquad (32)$$

где постоянные $C_1$ и $C_1'$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= 4(-1)^m \frac{\dot I}{c}\,\frac{e^{\alpha/2}H_m^{(2)}(\alpha)}{\alpha S_m(\alpha)} \\ C_1' &= 4(-1)^m \frac{\dot I}{c}\,\frac{\Phi(\alpha)}{\alpha S_m(\alpha)} \end{aligned}\right\}. \qquad (33)$$

В последних формулах через $S_m(\alpha)$ обозначена функция

$$S_m(\alpha) = [2\Phi'(\alpha) - \Phi(\alpha)]H_m^{(2)}(\alpha) + \Phi(\alpha)H_{m+1}^{(2)}(\alpha), \qquad (34)$$

которая получается из третьей формулы (30) путем простых преобразований.

Имея в виду, что напряженность электрического поля выражается в настоящей задаче через вектор-потенциал в виде

$$E = -ikA,$$

с учетом (31), (32) и (33), получаем

$$E(\rho, \varphi) = -\frac{4i\dot I}{ac}\exp\left[\frac{\alpha}{2}(1-\rho^2)\right] \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{H_m^{(2)}(\alpha)}{S_m(\alpha)}\rho^m \Phi(\gamma, b;\, \alpha\rho^2)\cos m\varphi, \qquad \rho \leqslant 1; \qquad (35)$$

$$E(\rho,\varphi) = -\frac{4i\dot I}{ac}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{\Phi(\alpha)}{S_m(\alpha)} H_m^{(2)}(\alpha\rho)\cos m\varphi, \qquad \rho \geqslant 1. \qquad (36)$$

При этом в суммах по $m$ при члене с $m=0$ необходимо учитывать множитель $1/2$.

## 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вырожденные гипергеометрические функции, входящие в выражения (35), (36) и (34), являются плохо табулированными. Однако в большинстве случаев при практическом расчете линз Люнеберга можно обойтись без таблиц этих функций.

На самом деле, уже при $a/\lambda = 10$ параметр $\alpha = 62{,}832$, что представляет из себя весьма большое число. На практике же отношение $a/\lambda$ обычно выбирается еще большим [1]. Таким образом, при вычислении коэффициентов рядов (35) и (36) можно воспользоваться соответствующими асимптотическими представлениями для вырожденных гипергеометрических (а также для ганкелевых) функций при большом $\alpha$.

Параметр $\alpha$ входит в функцию $\Phi(\gamma, b; \alpha)$, где, согласно (15),

$$\gamma = -\frac{\alpha - b}{2}, \quad b = m + 1,$$

специфическим для задач рассматриваемого класса образом. Насколько известно, асимптотическое поведение такого вида функций $\Phi$ при любых значениях $b$ никем ранее не рассматривалось.

Результаты исследования асимптотического представления решений (35) и (36) будут опубликованы автором в другом месте.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Пилер, Д. Арчер. Двумерная линза Люнеберга для сантиметровых волн. Вопросы радиолокационной техники, 1954, *3* (21), 44.
2. А. Гутман. Модифицированная линза Люнеберга. Вопросы радиолокационной техники, 1955, *1* (25), 91.
3 Erdelyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi, Higher transcendental functions, vol. I, 1953, Mc Grow-Hill Book Company Inc.

Исследовательский
физико-технический институт
при Томском университете

Поступила в редакцию
24 сентября 1957 г.