

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СИНТЕЗА СХЕМ

О. Б. Лупанов

Описывается некоторый общий метод синтеза схем на примерах контактных схем, контактных параллельно-последовательных схем и схем из функциональных элементов и улучшаются известные ранее оценки сложности этих схем.

Одной из задач кибернетики является задача построения схем, реализующих заданные функции, из сравнительно простых элементов. Это может быть, например, синтез электронных схем из стандартных блоков или релейно-контактных схем из стандартных реле и т. д. При этом обычно стремятся строить в том или ином смысле наилучшие схемы.

Во многих случаях имеется тривиальный способ нахождения такой экстремальной схемы, однако он мало эффективен в том смысле, что связан с очень большим перебором и, кроме того, не дает заранее никакого представления о сложности получаемой схемы. Поэтому встает вопрос об отыскании более эффективных методов построения достаточно хороших схем с оценками их сложности.

Функция, оценивающая сложность схем, реализующих объекты из некоторой последовательности $\mathfrak{N} = \{\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \dots, \mathfrak{N}_n, \dots\}$ множеств объектов. (в нашем случае \mathfrak{N}_n является множеством всех функций алгебры логики n аргументов), может быть введена следующим образом. Пусть каждой рассматриваемой схеме S поставлено в соответствие действительное число $L(S)$ — индекс простоты (содержательно индекс простоты характеризует сложность схемы). Рассмотрим следующие функции: $L(f) = \inf_{S \in \mathfrak{N}} L(S)$ (\inf берется по всем схемам S , реализующим функцию f); $L(n) = \sup_{f \in \mathfrak{N}_n} L(f)$.

Задача синтеза схем с оценками исследовалась многими авторами [1, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 20] и др. Здесь она решается при помощи одного общего метода ** для трех случаев: в § 2 — для синтеза контактных схем (известная ранее верхняя оценка [20] понижается в два раза); в § 3 — для синтеза контактных II-схем (известная ранее верхняя оценка [19] существенно снижается); в § 6 — для синтеза схем из функциональных элементов эта задача для одного частного случая решается в некотором смысле окончательно *** (определение таких схем дано в § 4).

1. ПРАВИЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Каждая функция алгебры логики f может быть задана таблицей с двумя входами (см. табл. 1).

* Функция $L(n)$ была введена К. Э. Шенноном [20] для оценки числа контактов в контактных схемах

** Этот метод применялся автором ранее для синтеза вентильных и контактно-вентильных схем [3].

*** Здесь получена асимптотическая формула для $L(n)$, а в работе Д. Ю. Мюллера [16] — верхняя и нижняя оценки для этой функции. Подробнее о постановке задачи см. § 4.

Таблица 1.

$x_{i_1} \dots$	$x_{i_{k-1}}$	x_{i_k}	0 ⋮ 0	$\sigma_{i_{k+1}}\dots\sigma_{i_n}$	1 ⋮ 1	$x_{i_{k+1}}$ x_{i_n}
0	...	0	0			A_1
						A_2
						A_1
σ_{i_1}	...	$\sigma_{i_{k-1}}$	σ_{i_k}	...	$f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$	
1	...	1	1			A_p
						A_r

В этом параграфе число k и расположение аргументов $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}$ в таблицах будем считать фиксированными. Матрицу определяющую значения функции f , обозначим через $M(f)$.

Разобьем строки матрицы $M(f)$ на группы A_1, \dots, A_p (см. табл. 1). Обозначим через $f_j(x_1, \dots, x_n)$ функцию, совпадающую с $f(x_1, \dots, x_n)$ на строках группы A_j из $M(f)$ и равную 0 в остальных случаях.* Тогда

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{j=1}^p f_j(x_1, \dots, x_n).$$

Рассмотрим матрицу $M(f_j)$. Ее столбцы разбиваются на группы одинаковых между собой столбцов (пусть число групп равно $t(j)$); занумеруем эти группы. Функцию f_j можно представить в виде

$$f_j = \bigvee_{h=1}^{t(j)} f_{jh},$$

где f_{jh} совпадает с f_j на h -й группе столбцов и равна 0 в остальных случаях. Очевидно, что

$$f_{jh}(x_1, \dots, x_n) = f_{jh}^{(1)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \cdot f_{jh}^{(2)}(x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}),$$

где**

$$f_{jh}^{(1)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = \bigvee x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \dots x_{i_k}^{\sigma_{i_k}}$$

(дизъюнкция берется по множеству \sum_{jh}^1 наборов $(\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_k})$, которые соответствуют ненулевым строкам матрицы $M(f_{jh})$);

$$f_{jh}^{(2)}(x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}) = \bigvee x_{i_{k+1}}^{\sigma_{i_{k+1}}} \dots x_{i_n}^{\sigma_{i_n}}$$

(дизъюнкция берется по множеству \sum_{jh}^2 наборов $(\sigma_{i_{k+1}}, \dots, \sigma_{i_n})$, которые соответствуют ненулевым столбцам матрицы $M(f_{jh})$).

Таким образом,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{j=1}^p f_j = \bigvee_{j=1}^p \bigvee_{h=1}^{t(j)} \left[\left(\bigvee x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \dots x_{i_k}^{\sigma_{i_k}} \right) \cdot \left(\bigvee x_{i_{k+1}}^{\sigma_{i_{k+1}}} \dots x_{i_n}^{\sigma_{i_n}} \right) \right]. \quad (1.1)$$

$$(\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_k}) \in \sum_{jh}^1 \quad (\sigma_{i_{k+1}}, \dots, \sigma_{i_n}) \in \sum_{jh}^2$$

* Будем говорить в этом случае, что функции f_j относятся к аргументам x_{i_1}, \dots, x_{i_k} .

** x^σ означает x , если $\sigma = 1$, и \bar{x} , если $\sigma = 0$.

Представление (1.1) будем называть *правильным* представлением функции f , если группы A_1, \dots, A_p имеют одинаковое число s строк (кроме, быть может, одной, содержащей меньшее число строк). Числа k и s будем называть *параметрами* этого представления.

2. СИНТЕЗ КОНТАКТНЫХ СХЕМ

Контактное дерево от n аргументов x_1, \dots, x_n — это схема, имеющая один входной (выходной) полюс и 2^n выходных (входных) полюсов и реализующая каждую функцию вида $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}$ между входным (выходным) полюсом и одним из выходных (входных) полюсов. Оно содержит $2 \cdot 2^n - 2$ контактов. На рис. 1 изображено контактное дерево трех аргументов. Входные и выходные полюсы многополюсников будем называть соответственно их входами и выходами.

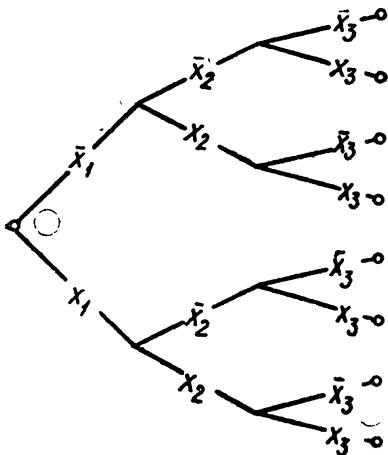


Рис. 1

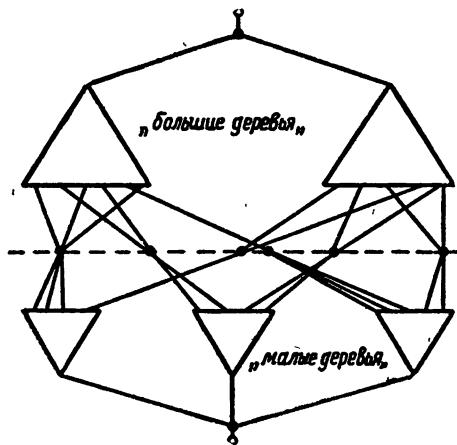


Рис. 2

Рассмотрим представление (1.1) функции f . Контактная схема для функции f строится из p контактных деревьев от аргументов $x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}$ («большие деревья»; каждое из них имеет один вход и 2^{n-k} выходов) и $\max_{j=1}^p t(j)$ контактных деревьев от аргументов x_{i_1}, \dots, x_{i_k} («малые деревья»; каждое из них имеет 2^k входов и один выход). Выходы j -го «большого дерева», соответствующие конъюнкциям из Σ_{jh}^2 (см., § 1), объединяются, и полученная вершина соединяется с входами h -го «малого дерева», соответствующими конъюнкциям из Σ_{jh}^1 . Объединенные входы «больших деревьев» образуют один полюс схемы для f ; объединенные выходы «малых деревьев» — второй полюс (см. рис. 2).

Для доказательства того факта, что полученная схема действительно реализует функцию f , воспользуемся следующим утверждением, доказательство которого мы здесь приводить не будем.

Определение *. Контактный $(1, q)$ -полюсник называется *квазиразделительным*, если любой его путь, идущий от выхода i к выходу j , где $i \neq j$, имеющий ненулевую проводимость, проходит через вход.

Лемма **. Пусть M — квазиразделительный $(1, q)$ -полюсник с проводимостями $f_i^{(M)}$ между входом и выходом i и N — произвольный $(r, 1)$ -полюсник с проводи-

* Понятие квазиразделительного (p, q) -полюсника введено В. М. Остиану [6].

** Эта лемма является обобщением теоремы К. Э. Шеннона [20] на случай квазиразделительных многополюсников. Ее доказательство, по существу, содержится в доказательстве теоремы 1 работы В. М. Остиану [6].

мостями $f_j^{(N)}$ между входом j и выходом. Пусть далее каждый выход i многополюсника M соединен ровно с одним выходом $\tau(i)$ многополюсника N . Тогда проводимость f полученного двухполюсника (входом его является вход многополюсника M , выходом — выход многополюсника N) есть

$$f = \bigvee_{i=1}^q f_i^{(M)} \cdot f_{\tau(i)}^{(N)}.$$

В нашем случае условия леммы выполнены (квазиразделительным $(1, q)$ -полюсником является многополюсник, образованный из «больших деревьев»; на рис. 2 он расположен над пунктирной линией). Поэтому построенная схема реализует нужную функцию.

Пример. На рис. 3 изображена схема, реализующая функцию, заданную табл. 2. Здесь взято $s=2$ (одна из групп строк содержит две первые строки, другая — две последние строки); очевидно, что $p=2$ и $t(j)=3$ ($j=1, 2$).

Таблица 2

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1		
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1		
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1	x_4	x_5
	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1
	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0
	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1

Описанная конструкция позволяет варьировать распределение аргументов по группам $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$, $\{x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}\}$ (т. е. число k и множество μ)

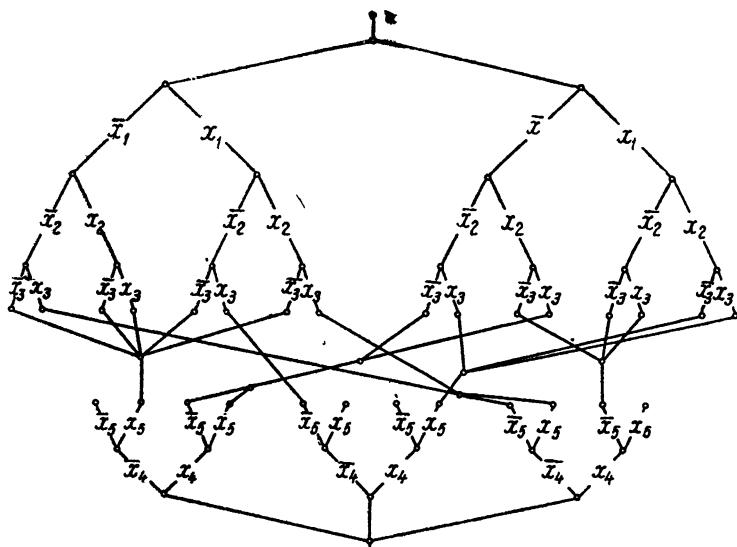


Рис. 3

$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\})$ и представление $f = \bigvee_{j=1}^p f_j$ (т. е. число p и функции f_j из (1.1)). Можно сделать еще один шаг, разрешая выбирать функции f_j произвольно (лишь бы их дизъюнкция была равна f) и заменяя схемы, построенные из деревьев, схемами, построенными методом каскадов, предложенным Г. Н. Поваровым [8].

Алгоритм синтеза в этом случае состоит в следующем:

- а) по данной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ находят функции $f_j(x_1, \dots, x_n)$, $1 \leq j \leq p$, так что $f = \bigvee_{j=1}^p f_j$ (попарные конъюнкции функций f_j не обя-

заны все равняться нулю); для получения функций f_j можно воспользоваться представлением (1.1);

б) методом каскадов строят $(p, 1)$ -полюсник, реализующий функции f_j (разлагая каждую из них сначала в каком-то порядке, вообще говоря, разном для разных функций, по аргументам $x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_k}$, а затем в одном порядке по остальным аргументам);

в) объединяют входы полученного $(p, 1)$ -полюсника.

Из сказанного непосредственно следует, что описанный здесь метод позволяет строить схемы, не худшие, чем построенные методом каскадов

Пример. На рис. 4 изображена схема, построенная «улучшенным» способом для функции f , заданной табл. 3. Матрицы M_1 и M_2 суть соот-

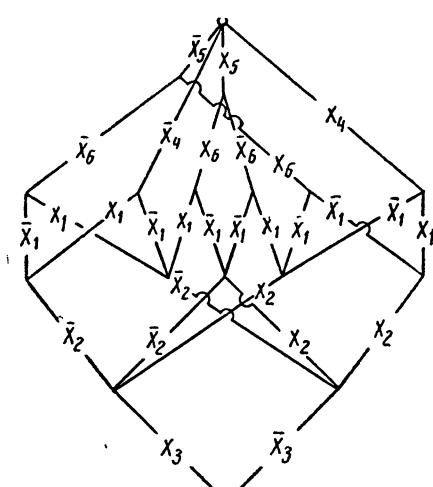


Рис. 4

ветственно матрицы функций f_1 и f_2 , относящихся к аргументам x_1, x_2, x_3 ($f = f_1 \vee f_2$).

Таблица 3									
x_4	0	0	0	0	1	1	1	1	
x_5	0	0	1	1	0	0	1	1	
x_6	0	1	0	1	0	1	0	1	
	1	1	1	1	0	0	0	0	$M_1 =$
	1	0	1	1	1	0	1	1	
	0	1	1	1	0	1	1	1	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	1	1	1	1	0	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1	1	
	0	1	1	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1	0	0	0	
	0	0	0	0	1	1	1		

Перейдем теперь к оценкам сложности схем, построенных таким способом.

Пусть $L(n)$ — минимальное число контактов, достаточное для реализации любой функции алгебры логики n аргументов* (т. е. в качестве индекса простоты схемы принято число ее контактов).

Теорема 1.**

$$L(n) < \frac{2^{n+1}}{n} (1 + o(1)).$$

Доказательство. Рассмотрим правильное представление функции с параметрами

$$k = [2 \lg_2 n] \text{ и } s = [n - 4 \lg_2 n]; \quad (2.1)$$

обозначим $n-k$ через m . В этом случае число А «больших деревьев» не превосходит $\left[\frac{2^k}{s}\right] + 1 \leq \frac{2^k}{s} + 1$, число В «малых деревьев» не превосходит 2^s . Общее число C контактов во всех деревьях не превосходит

$$2(A \cdot 2^m + B \cdot 2^k) \leq 2\left(\frac{2^{k+m}}{s} + 2^m + 2^{k+s}\right) = 2\left(\frac{2^n}{s} + 2^m + 2^{k+s}\right).$$

В силу (2.1)

$$2^m = O\left(\frac{2^n}{n^2}\right), \quad 2^{k+s} = O\left(\frac{2^n}{n^2}\right).$$

Поэтому

$$C \leq \frac{2^{n+1}}{s} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{2^{n+1}}{n} \left(1 + O\left(\frac{\lg_2 n}{n}\right)\right).$$

Замечание. Можно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ и бесконечно многих значений n существуют функции от n аргументов, требующие для своей реализации методом каскадов не менее $(1-\varepsilon) \frac{2^{n+2}}{n}$ контактов***, т. е. для некоторой последовательности n метод каскадов асимптотически в два раза хуже описанного здесь метода.

Назовем нагрузкой i -го реле в схеме число контактов x_i и \bar{x}_i в этой схеме, и пусть $M(n)$ — такое минимальное число, что контактными схемами с максимальной нагрузкой реле не более $M(n)$ можно реализовать любую функцию алгебры логики n аргументов [20].

Теорема 2**.**

$$M(n) < \frac{2^{n+1}}{n^2} (1 + o(1)).$$

* См. первую сноску на стр. 120.

** К. Э. Шеноном установлено [20], что для любого

$$\varepsilon > 0 \text{ и } n > n(\varepsilon) \quad (1-\varepsilon) \frac{2^n}{n} < L(n) < (1+\varepsilon) \frac{2^{n+2}}{n}.$$

В настоящее время автором показано, что $L(n) \sim \frac{2^n}{n}$.

**** Достаточно рассмотреть функции $f(x_1, \dots, x_n)$, $n = 2^m + m$, такие, что функции $f(x_1, \dots, x_{2^m}, x_{2^m+1}, \dots, x_n)$ попарно различны (т. е. их 2^{2^m} штук).

**** В работе К. Э. Шенона [20] доказано, что для любого $\varepsilon > 0$ и $n > n(\varepsilon)$

$$(1-\varepsilon) \frac{2^n}{n^2} < M(n) < (1+\varepsilon) \frac{2^{n+2}}{n^2}.$$

В настоящее время автором показано, что $M(n) \sim \frac{2^n}{n^3}$.

Доказательство. В конструкции, использованной в доказательстве теоремы 1 положим $k = \lceil 4 \lg_2 n \rceil$, $s = \lceil n - 7 \lg_2 n \rceil$. «Большие деревья» разбьем на группы по $m = n - k$ штук (одна группа — «неполная» — может содержать меньше деревьев). Число «полных» групп (т. е. из m деревьев) не превосходит $\frac{2^k + s}{sm}$. Каждая «полная» группа может быть реализована с равномерной нагрузкой. Для этого достаточно в деревьях каждой такой группы контакты расставить в следующих порядках (например, от входа к выходам):

$$(1, 2, \dots, m-1, m), (2, 3, \dots, m, 1), \dots, (m, 1, \dots, m-2, m-1)$$

(указаны номера реле). Нагрузка каждого реле в „полней“ группе равна $2 + 2^2 + \dots + 2^m$, т. е. не превосходит $2 \cdot 2^m$; максимальная нагрузка в „неполной“ группе не превосходит $m \cdot 2^m$. Поэтому максимальная нагрузка в „больших деревьях“ не превосходит

$$\frac{2^k + s}{sm} \cdot 2 \cdot 2^m + m2^m = \frac{2^{n+1}}{n^2} (1 + o(1)),$$

поскольку $k + m = n$. Максимальная нагрузка в „малых деревьях“ не превосходит

$$2 \cdot 2^k \cdot 2^s \leq \frac{2^{n+1}}{n^3} = o\left(\frac{2^n}{n^3}\right).$$

Теорема доказана.

3. СИНТЕЗ КОНТАКТНЫХ П-СХЕМ

Известно, что синтез контактной П-схемы (параллельно-последовательной схемы), реализующей некоторую функцию алгебры логики f , эквивалентен представлению этой функции в виде формулы через базисные функции: конъюнкцию дизъюнкцию и отрицание (причем, знак отрицания встречается только над символами элементарных переменных). Поэтому все сказанное ниже о формулах будет относиться и к контактным П-схемам.

Обозначим через $L^\Pi(f)$ (соответственно $L_r^\Pi(n); L^\Pi(n)$) минимальное число символов переменных, достаточное для реализации формулами указанного выше вида функции f (соответственно любой функции n аргументов, принимающей значение 1 равно на r наборах значений аргументов; любой функции n аргументов).

Очевидно, что

$$L_r^\Pi(n) \leq rn. \quad (3.1)$$

Лемма (теорема Б. И. Финикова [11]).

$$L_r^\Pi(n) \leq 2n + r2^{r-1}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию f , принимающую значение 1 ровно на r наборах. Матрицу, строками которой являются эти наборы, будем называть матрицей данной функции*. Заменой некоторых x_i на \bar{x}_i можно добиться того, чтобы первая строка матрицы состояла из одних единиц, а перестановкой столбцов (т. е. переименованием аргументов) — того, чтобы одинаковые столбцы стояли рядом. Пусть полученная матрица соответствует функции f' . Столбцы матрицы разобьем на группы одинаковых между собой столбцов (число групп не превосходит 2^{r-1}). Пусть теперь аргументы x_1, \dots, x_n , соответствуют 1-й группе столбцов, $\dots, x_{n_{l-1}+1}, \dots, x_{n_l}$ соответствуют l -й (последней) группе столбцов

* В этом доказательстве.

Рассмотрим функции

$$f_1 = \& \left| \left(\begin{smallmatrix} n_i \\ & \& x_m \\ & m=n_{i-1}+1 \end{smallmatrix} \right) \vee \left(\begin{smallmatrix} n_i \\ & \& \bar{x}_m \\ & m=n_{i-1}+1 \end{smallmatrix} \right) \right| \quad (\text{здесь } n_0=0),$$

$$f_2 = \bigvee_{p=1}^r \&_{i=1}^l x_n^{\sigma_{p,n_i}},$$

где σ_{p,n_i} — элемент преобразованной матрицы, стоящий в p -й строке и n_i -м столбце. Покажем, что $f_1 \cdot f_2 = f'$. В самом деле, все строки матрицы функции f' являются строками матрицы функции f_1 и, с другой стороны, матрица функции $f_1 f_2$ содержит те и только те строки матрицы функции f_1 , которые являются одновременно строками матрицы функции f' . Очевидно, что $L^\Pi(f_1) \leq 2n$ и $L^\Pi(f_2) \leq r2^{r-1}$ и, следовательно, $L^\Pi(f) = L^\Pi(f') \leq 2n + r2^{r-1}$. Лемма доказана.

Пример. Функция $f(x_1, \dots, x_{16})$, имеющая матрицу

$$1111111111111111$$

$$000001111110000$$

$$1111100000000000$$

$$0000000000001111,$$

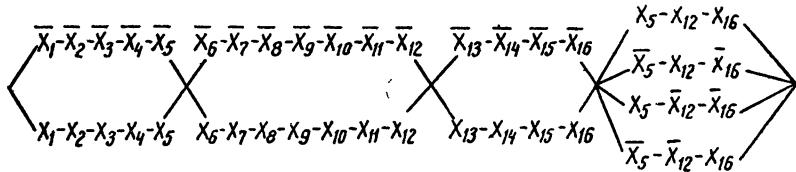


Рис. 5

реализуется схемой рис. 5.

В дальнейшем нам понадобится следствие приведенной выше леммы.

Следствие [11]. Если элементы последовательности r_1, \dots, r_n, \dots удовлетворяют условию $r_n \geq (\lg_2 n)^2$, то $L_{r_n}^\Pi(n) \leq \frac{2r_n n}{\lg_2 n} (1 + \varphi(n))$, где $\varphi(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 3**

$$L^\Pi(n) < \frac{2^{n+1}}{\lg_2 n} (1 + o(1)).$$

Доказательство. Пусть f — произвольная функция n аргументов. Рассмотрим правильное представление этой функции с параметрами

$$k = [2 \lg_2 n], \quad s = [n - 3 \lg_2 n]; \quad (3.2)$$

обозначим $n-k$ через m . Имеем (см. § 1)

* Для доказательства этого утверждения достаточно функцию с r_n единицами в таблице значений представить в виде дизъюнкции функций, каждая из которых имеет $[\lg_2 n - 2 \lg_2 \lg_2 n]$ единиц в таблице значений.

** Как известно [18], $L^\Pi(n) > (1 - \varepsilon) \frac{2^n}{\lg_2 n}$ (для любого $\varepsilon > 0$ и $n > n(\varepsilon)$). Наилучшая известная верхняя оценка этой функции есть $3 \cdot 2^{n-1} - 2$ [19].

В настоящее время автором показано, что $L(n) \sim \frac{2^n}{\lg_2 n}$.

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{j=1}^p \bigvee_{h=1}^{t(j)} f_{jh}^{(1)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \cdot f_{jh}^{(2)}(x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}),$$

где $p \leq \frac{2^k}{s} + 1$. Очевидно, что

$$L^\Pi(f) \leq \sum_{j=1}^p \sum_{h=1}^{t(j)} (L^\Pi(f_{jh}^{(1)}) + L^\Pi(f_{jh}^{(2)})). \quad (3.3)$$

Обозначим через q_j число функций $f_{jh}^{(2)}$ при фиксированном j , принимающих значение 1 ровно на r наборах. Тогда

$$\sum_r q_j(r) = t(j) \leq 2^s; \quad \sum_r r q_j(r) = 2^m. \quad (3.4)$$

Из (3.1) и приведенного выше следствия вытекает

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{t(j)} L^\Pi(f_{jh}^{(2)}) &\leq \sum_r L_r^\Pi(m) q_j(r) \leq \sum_{r < (\lg_2 m)^2} L_r^\Pi(m) q_j(r) + \sum_{r > (\lg_2 m)^2} L_r^\Pi(m) q_j(r) \leq \\ &\leq \sum_{r < (\lg_2 m)^2} r m q_j(r) + \sum_{r > (\lg_2 m)^2} \frac{2rm}{\lg_2 m} (1 + \varphi(m)) q_j(r) \leq (\lg_2 m)^2 m \sum_{r < (\lg_2 m)^2} q_j(r) + \\ &\quad + \frac{2m}{\lg_2 m} (1 + \varphi(m)) \sum_{r > (\lg_2 m)^2} r q_j(r), \end{aligned}$$

где $\varphi(m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Из последнего неравенства и (3.4) следует, что

$$\sum_{h=1}^{t(j)} L^\Pi(f_{jh}^{(2)}) \leq (\lg_2 m)^2 m 2^s + \frac{2m}{\lg_2 m} (1 + \varphi(m)) 2^m.$$

Отсюда, а также из (3.2) и (3.3) имеем:

$$L^\Pi(f) \leq \left((\lg_2 m)^2 m 2^s + \frac{2m}{\lg_2 m} (1 + \varphi(m)) 2^m + ks 2^s \right) \left(\frac{2^k}{s} + 1 \right) = \frac{2^{n+1}}{\lg_2 n} (1 + o(1)),$$

так как $m+k=n$. Теорема доказана.

4. СХЕМЫ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Мы будем рассматривать схемы [2], построенные из функциональных элементов *, т. е. элементарных подсхем [2], имеющих некоторое число входных полюсов и один выходной полюс; каждая из элементарных подсхем реализует функцию от аргументов, число которых равно числу входных полюсов этой подсхемы (рис. 6). ** Дадим определение понятий схемы, вершин; входных и выходных полюсов схемы.

Определение *** (индуктивное).

1) Функциональный элемент есть схема; ее входными полюсами и выходным полюсом являются соответственно входные полюсы и выходной полюс функционального элемента; множество ее вершин совпадает с множеством всех полюсов.

* В некоторых случаях мы будем опускать слово «функциональный».

** Число входных полюсов функционального элемента может быть равно нулю; в этом случае он реализует функцию от 0 аргументов т. е. константу

*** Это определение является частным случаем определения схемы, данным в [2]. С другой стороны, оно близко к определению логической сети, введенному Бэрксом и Райтом [13].

2) Если S' и S'' — схемы без общих вершин, то их совокупность есть схема; множества ее вершин, входных и выходных полюсов являются объединениями (теоретико-множественными) соответствующих множеств схем S' и S'' (см. рис. 7, а).

3) Если S — схема, то результат отождествления («соединения») некоторых входных ее полюсов также есть схема (S'). Множества вершин, входных и выходных полюсов схемы S' суть соответствующие множества вершин и полюсов схемы S , если не различать вершины, отождествленные при образовании схемы S' (рис. 7, б).

4) Если S' и S'' — схемы без общих вершин с множествами входных и выходных полюсов соответственно M_1' , M_2' и M_1'' , M_2'' , то результат попарного отождествления некоторого множества N_2' (попарно различных) выходных полюсов схемы S' с некоторым множеством N_1'' (содержащим столько же элементов, что и N_2') также попарно различных входных полюсов схемы S'' также есть схема (S). Множество ее входных полюсов есть множество $M_1' \cup (M_1'' \setminus N_1'')$; множество ее выходных полюсов есть $M_2' \cup M_2''$. Множество вершин схемы S совпадает с множеством вершин схем S' и S'' , если не различать вершины, отождествленные при образовании схемы S (см. рис. 7, в).

5) Если S — схема, то результат объявления выходными полюсами некоторого подмножества множества выходных полюсов схемы S также есть схема (S'). Множества вершин и входных полюсов схемы S' совпадают с соответствующими множествами схемы S (см. рис. 7, г).

Будем говорить, что схема S является схемой над множеством $\{E\}$ функциональных элементов, если все функциональные элементы схемы S принадлежат множеству $\{E\}$.

Пусть схема имеет n входных полюсов a_1, \dots, a_n . Сопоставим им соответственно аргументы x_1, \dots, x_n . Функции, реализуемые схемой, вычисляются по следующему правилу (мы определим значение функций на наборе $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ значений аргументов):

1) входным полюсам схемы a_1, \dots, a_n приписываются соответственно значения $\sigma_1, \dots, \sigma_n$;

2) если всем входным полюсам функционального элемента E уже приписаны значения τ_1, \dots, τ_s (в порядке номеров его входных полюсов), то его выходному полюсу приписывается значение $f_E(\tau_1, \dots, \tau_s)$, где f_E функция, реализуемая функциональным элементом E .

Из определения схемы следует, что каждой вершине схемы будет приписано некоторое значение и притом однозначно. Значение, приписанное вершине c , является по определению значением функции $F_c(x_1, \dots, x_n)$ на наборе $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Среди этих функций мы будем выделять те, которые соответствуют выходным полюсам рассматриваемой схемы.

Пусть каждому функциональному элементу E приписано неотрицательное действительное число $P(E)$ — вес. Индекс простоты $L(S)$ схемы S определим как сумму весов всех функциональных элементов в S .

Приведенным весом $p(E)$ функционального элемента E , функция которого существенно зависит от $s \geq 2$ аргументов, будем называть число $P(E)$.

$s-1$.

Целью последующих параграфов является описание метода синтеза достаточно экономных (в смысле указанного выше индекса простоты) схем, реализующих функции алгебры логики. Множество $\{E\}$ функциональных элементов, над которым строятся схемы, будет предполагаться полным, т. е. будет предполагаться, что схемами над $\{E\}$ можно реализовать любую функцию алгебры логики.

Пусть $L(n)$ минимальное число такое, что схемами с индексом простоты, не превосходящим $L(n)$, можно реализовать любую функцию алгебры логики n аргументов.

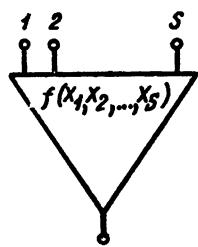


Рис. 6

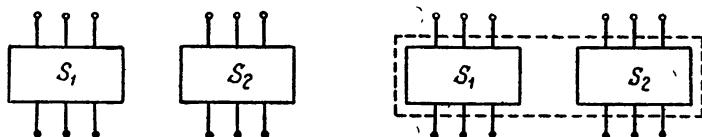


Рис. 7,а

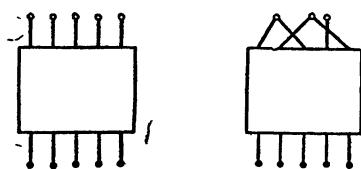


Рис. 7,б

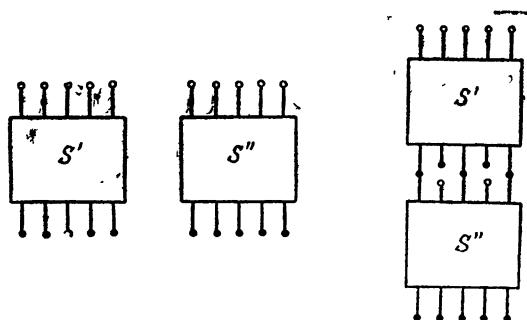


Рис. 7,в

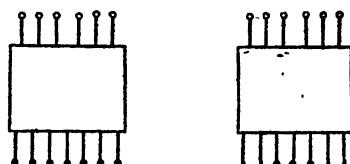


Рис. 7,г

Теорема 4. Если $\{E\}$ конечно все $P(E)$ положительны, то*

$$L(n) \sim (\min p(E)) \cdot \frac{2^n}{n},$$

причем для любого $\epsilon > 0$ и $n > n(\epsilon)$ для функций f от n аргументов x_1, \dots, x_n , для которых $L(f) \leq (1 - \epsilon) L(n)$, стремится к нулю с ростом n .

Доказательство теоремы разбито на три части. В § 5 доказывается одно вспомогательное утверждение, используемое при описании метода синтеза. В § 6 описывается метод синтеза и получается оценка сверху. В § 7 доказывается нижняя оценка.

5. ЛЕММА

Введем некоторые обозначения. Пусть между наборами $(\sigma_1, \dots, \sigma_u)$ из нулей и единиц длины u и целыми числами q , $0 \leq q < 2^u$, установлено следующее (взаимно-однозначное) соответствие: числу q соответствует набор, являющийся двоичной записью числа q , т. е.

$q = \sum_{i=1}^u \sigma_i 2^{u-i}$. Число q , отвечающее набору $(\sigma_1, \dots, \sigma_u)$, будем обозначать $q(\sigma_1, \dots, \sigma_u)$, а набор, отвечающий числу q , обозначим $(\sigma_1(q), \dots, \sigma_u(q))$.

Лемма. Пусть функция $F(x_0, \dots, x_{N-1}), N \geq 2^u$, существенно зависит от всех своих N аргументов. Тогда существуют такие функции $\psi_i(y_1, \dots, y_u, z)$, $0 \leq i < 2^u$ и (в случае, если $N > 2^u$) такие функции $\chi_i(y_1, \dots, y_u)$, $2^u \leq i < N$, что любая функция алгебры логики $f(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_k)$ может быть представлена в виде **

$$\begin{aligned} f(y_1, \dots, y_u, z_1, \dots, z_k) = \\ = F(\psi_0(y_1, \dots, y_u, f(0, \dots, 0, z_1, \dots, z_k)), \dots, \psi_{2^u-1}(y_1, \dots, y_u, f(1, \dots, 1, z_1, \dots, z_k)), \\ \chi_{2^u}(y_1, \dots, y_u), \dots, \chi_{N-1}(y_1, \dots, y_u)). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Доказательство. Так как функция F существенно зависит от всех своих аргументов, то для каждого j , $0 \leq j < 2^u$ найдутся такие константы $c_{j,i}$, $0 \leq i < N$, что***

$$F(c_{j,0}, \dots, c_{j,j-1}, x_j, c_{j,j+1}, \dots, c_{j,N-1}) = x_j \otimes c_{j,j}. \quad (5.2)$$

Рассмотрим функции ψ_i и χ_i , определенные следующим образом:

$$\psi_i(\sigma_1(j), \dots, \sigma_u(j), z) = \begin{cases} c_{j,i}, & \text{если } j \neq i, \\ z \otimes c_{j,i}, & \text{если } j = i, \end{cases} \quad (0 \leq i < 2^u), \quad (5.3)$$

$$\chi_i(\sigma_1(j), \dots, \sigma_u(j)) = c_{j,i} \quad (2^u \leq i < N). \quad (5.4)$$

Эти функции удовлетворяют условию леммы. В самом деле, рассмотрим произвольный набор $(\sigma_1, \dots, \sigma_u)$. Он является двоичной записью числа $j = q(\sigma_1, \dots, \sigma_u)$, $0 \leq j < 2^u$. Из (5.2), (5.3) и (5.4) имеем

$$F(\psi_0(\sigma_1(j), \dots, \sigma_u(j), f(0, \dots, 0, z_1, \dots, z_k)), \dots,$$

$$\psi_{2^u-1}(\sigma_1(j), \dots, \sigma_u(j), f(1, \dots, 1, z_1, \dots, z_k)),$$

$$\chi_{2^u}(\sigma_1(j), \dots, \sigma_u(j)), \dots, \chi_{N-1}(\sigma_1(j), \dots, \sigma_u(j))) =$$

* Напомним, что функция $p(E)$ определена только для функциональных элементов, реализующих функции, существенно зависящие более чем от одного аргумента.

** Формула (5.1) представляет собой обобщение разложения функции по аргументам y_1, \dots, y_u .

*** Здесь знак \otimes означает сложение по *mod* 2.

$$= F(c_{j,0}, \dots, c_{j,j-1}, f(\sigma_1(j), \dots, \sigma_u(j), z_1, \dots, z_k) \otimes c_{j,j}, c_{j,j+1}, \dots, c_{j,jN-1}) = \\ = f(\sigma_1(j), \dots, \sigma_u(j), z_1, \dots, z_k).$$

Лемма доказана.

Замечание. Очевидно, что каждая из функций ψ_i может быть представлена в виде

$$\psi_i(y_1, \dots, y_u, z) = \bar{z}\psi_{i0}(y_1, \dots, y_u) \vee z\psi_{i1}(y_1, \dots, y_u), \quad (5.5)$$

где ψ_{i0} , и ψ_{i1} суть некоторые функции аргументов y_1, \dots, y_u .

6. МЕТОД СИНТЕЗА И ОЦЕНКА СВЕРХУ

Рассмотрим произвольную функцию алгебры логики f от n аргументов. Ее можно представить в виде

$$f = \bigvee_{j=1}^p f_j = \bigvee_{j=1}^p \bigvee_{\sigma_1, \dots, \sigma_t} x_1^{\sigma_1} \dots x_t^{\sigma_t} f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_t, x_{t+1}, \dots, x_n), \quad (6.1)$$

где функции f_j относятся к аргументам x_{n-k+1}, \dots, x_n (см. §1); правильное представление $f = \bigvee_{j=1}^p f_j$ имеет параметры k и s .

Пусть элементарная подсхема E_0 с минимальным приведенным весом $p(E_0)$ реализует функцию φ , и пусть φ существенно зависит от $r+1 \geq 2$ аргументов. Образуем функцию

$$F(y_0, \dots, y_{vr}) = \varphi(y_0, \dots, y_{r-1}, \varphi(y_r, \dots, \dots, \varphi(y_{(v-1)r}, \dots, y_{vr}), \dots)),$$

где v —минимальное число такое, что $2^u - 1 \leq vr < 2^u - 1 + r$, а u удовлетворяет условию $u \leq n - t^*$. Функция F , очевидно, существенно зависит от всех своих аргументов.

На основании леммы § 5 каждую из функций $f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_t, x_{t+1}, \dots, x_n)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_t, x_{t+1}, \dots, x_n) = \\ = F(\psi_0(x_{t+1}, \dots, x_{t+u}, f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_t, 0, \dots, 0, x_{t+u+1}, \dots, x_n)), \dots \quad (6.3) \\ \dots, \psi_{2^u-1}(x_{t+1}, \dots, x_{t+u}, f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_t, 1, \dots, 1, x_{t+u+1}, \dots, x_n)), \\ \chi_{2^u}(x_{t+1}, \dots, x_{t+u}), \dots, \chi_{vr}(x_{t+1}, \dots, x_{t+u})), \end{aligned}$$

где функции ψ_i и χ_i не зависят от набора $(\sigma_1, \dots, \sigma_t)$.

Как уже указывалось, мы предполагаем, что множество $\{E\}$ функциональных элементов является полным. Поэтому существуют схемы T_1, T_2, T_3 , реализующие соответственно функции $F_1(x) = x, F_2(x, y) = xy, F_3(x, y) = x \vee y$; первая из этих схем имеет один вход и один выход, каждая из двух других—два входа и один выход. Пусть индексы простоты этих схем суть соответственно l_1, l_2, l_3 . Мы будем использовать эти схемы в процессе синтеза в качестве «стандартных блоков». Будут употребляться также «стандартные блоки» T_4 , реализующие функцию $F(y_0, \dots, y_{vr})$ (с индексом простоты $l_4 = vP(E_0)$)**.

Схему S для функции f мы будем строить из отдельных крупных блоков. Каждый из них будет строиться из стандартных блоков. Ниже при-

* Отсюда вытекает, что

$$v < \frac{2^u}{r} + 1. \quad (6.2)$$

** Как будет видно из дальнейшего, схема почти целиком будет состоять из функциональных элементов с минимальным приведенным весом.

ведено описание этих крупных блоков. Входы каждого из них либо присоединены к выходам описанных ранее блоков, либо являются входами схемы (в последнем случае будет указано, какие аргументы поставлены им в соответствие).

Описание схемы (соединение блоков схематически изображено на рис. 8).

I. Блок A реализует все функции $f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_{t+u}, x_{t+u+1}, \dots, x_n)$. Он имеет $k = n - t - u$ входов, соответствующих аргументам x_{t+u+1}, \dots, x_n и построен из стандартных блоков T_1, T_2, T_3 .

1) Сначала реализуются функции \bar{x}_i ($t + u + 1 \leq i \leq n$); для этого требуется k стандартных блоков T_1 . Индекс простоты этой части схемы равен kl_1 .

2) Затем реализуются все конъюнкции $x_{t+u+1}^{\sigma_{t+u+1}} \dots x_n^{\sigma_n}$. Для реализации каждой из них (исходя из функций x_i и \bar{x}_i) требуется $k - 1$ стандартный блок T_2 , для реализации всех конъюнкций — $(k - 1)2^k$ стандартных блоков T_2 . Индекс простоты этой части схемы равен $(k - 1)2^k l_2$.

3) Наконец, реализуются все функции $f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_{t+u}, x_{t+u+1}, \dots, x_n)$ (не более $p2^s \leq \left(\frac{2^k}{s} + 1\right)2^s$ штук). Каждая функция, не равная тождественно нулю, реализуется как дизъюнкция соответствующих конъюнкций; для этого требуется не более s стандартных блоков T_3 . Тождественный нуль можно реализовать, например, как $x_n \cdot \bar{x}_n$; для этого нужен один стандартный блок T_2 . Индекс простоты этой части схемы не превосходит $s\left(\frac{2^k}{s} + 1\right)2^s l_3 + l_2$.

Таким образом, индекс простоты $L(A)$ блока A удовлетворяет условию

$$L(A) \leq kl_1 + k2^k l_2 + s\left(\frac{2^k}{s} + 1\right)2^s l_3. \quad (6.4)$$

II. Блок B реализует все конъюнкции $x_{t+1}^{\sigma_{t+1}} \dots x_{t+u}^{\sigma_{t+u}}$. Он имеет u входов, соответствующих аргументам x_{t+1}, \dots, x_{t+u} , и 2^u выходов и устроен так же, как соответствующая часть блока A . Его индекс простоты $L(B)$, очевидно, удовлетворяет условию

$$L(B) \leq ul_1 + u2^u l_2. \quad (6.5)$$

III. Блок C реализует все конъюнкции $x_1^{\sigma_1} \dots x_t^{\sigma_t}$. Он имеет t входов соответствующих аргументам x_1, \dots, x_t , и 2^t выходов и устроен так же, как блок B . Его индекс простоты $L(C)$ удовлетворяет условию

$$L(C) \leq tl_1 + t2^t l_2. \quad (6.6)$$

IV. Блок D реализует все функции $\phi_i(x_{t+1}, \dots, x_{t+u}), f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_{t+u}, x_{t+u+1}, \dots, x_n)$ и $\chi_i(x_{t+1}, \dots, x_{t+u})$. Входами этого блока являются выходы блока B и некоторые выходы блока A .

1) Для реализации каждой функции χ_i (как дизъюнкции соответствующих конъюнкций) требуется не более 2^u стандартных блоков T_3 . Число функций χ_i не превосходит r (см. стр. 132). Поэтому индекс про-

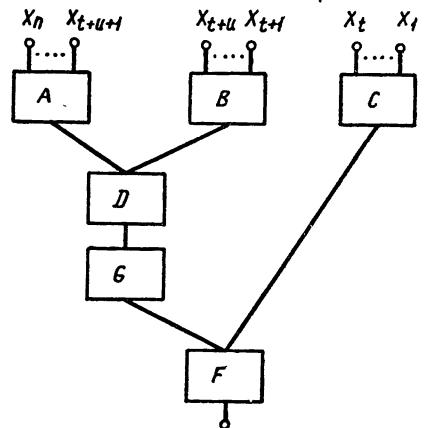


Рис. 8

стоты этой части блока D не более $r2^u l_3$.

2) Имеем (см. замечание к лемме § 5)

$$\begin{aligned} & \psi_i(x_{t+1}, \dots, x_{t+u}, f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_{t+u}, x_{t+u+1}, \dots, x_n)) = \\ & = f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_{t+u}, x_{t+u+1}, \dots, x_n) \cdot \psi_{ii}(x_{t+1}, \dots, x_{t+u}) \vee \\ & \vee f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_{t+u}, x_{t+u+1}, \dots, x_n) \cdot \psi_{i0}(x_{t+1}, \dots, x_{t+u}). \end{aligned}$$

Для реализации каждой из функций ψ_{i0} и ψ_{ii} (исходя из конъюнкций $x_{t+1}^{\sigma_{t+1}} \dots x_{t+u}^{\sigma_{t+u}}$) требуется не более 2^u стандартных блоков T_s ; для реализации каждой функции $\psi_i(x_{t+1}, \dots, x_{t+u}, f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_{t+u}, x_{t+u+1}, \dots, x_n))$ (исходя из ψ_{i0} и ψ_{ii} и функций, реализуемых блоком A) — два стандартных блока T_2 и по одному стандартному блоку T_1 и T_3 . Число функций ψ_i равно 2^u ; число различных функций $f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_{k+t}, x_{k+t+1}, \dots, x_n)$ не превосходит $\left(\frac{2^k}{s} + 1\right) 2^s$. Поэтому индекс простоты части блока D , реализующей все функции $\psi_i(x_{k+1}, \dots, x_{k+t}, f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_{k+t}, x_{k+t+1}, \dots, x_n))$, не превосходит $2^u \left(\frac{2^k}{s} + 1\right) \times 2^s [l_1 + 2l_2 + (2^{u+1} + 1) l_3]$.

Индекс простоты $L(D)$ блока D удовлетворяет соотношению

$$L(D) \leq r2^u l_3 + 2^u \left(\frac{2^k}{s} + 1\right) 2^s [l_1 + 2l_2 + (2^{u+1} + 1) l_3]. \quad (6.7)$$

V. Блок G реализует все функции $f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_t, x_{t+1}, \dots, x_n)$, исходя из функций, реализуемых блоком D . Для реализации каждой из них требуется (см. (6.3)) один стандартный блок T_4 . Поэтому

$$L(G) \leq 2^t \left(\frac{2^k}{s} + 1\right) l_4. \quad (6.8)$$

VI. Блок F реализует функцию f , исходя из функций, реализуемых блоками C и G (см. (6.1)). Он содержит не более $2^t \left(\frac{2^k}{s} + 1\right)$ стандартных блоков T_2 (для реализации каждой конъюнкции $x_1^{\sigma_1} \dots x_t^{\sigma_t} f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_t, x_{t+1}, \dots, x_n)$) и не более $2^t \left(\frac{2^k}{s} + 1\right)$ стандартных блоков T_3 (для реализации из этих конъюнкций функции f). Поэтому

$$L(F) \leq 2^t \left(\frac{2^k}{s} + 1\right) (l_2 + l_3). \quad (6.9)$$

Из (6.4), (6.5), (6.6), (6.7), (6.9) имеем

$$L' = L(A) + L(B) + L(C) + L(D) + L(F) \leq N_1 l_1 + N_2 l_2 + N_3 l_3, \quad (6.10)$$

где

$$N_1 = k + u + t + 2^{u+s} \left(\frac{2^k}{s} + 1\right), \quad (6.11)$$

$$N_2 = k2^k + u2^u + t2^t + 2 \cdot 2^{u+s} \left(\frac{2^k}{s} + 1\right) + 2^t \left(\frac{2^k}{s} + 1\right), \quad (6.12)$$

$$N_3 = s2^s \left(\frac{2^k}{s} + 1\right) + r2^u + 2^{u+s} \left(\frac{2^k}{s} + 1\right) (2^{u+1} + 1) + 2^t \left(\frac{2^k}{s} + 1\right) \quad (6.13)$$

Положим теперь

$$k = [2 \lg_2 n], \quad u = [\lg_2 n], \quad s = [n - 5 \lg_2 n], \quad (6.14)$$

тогда

$$t = n - k - u < n - 3 \lg_2 n + 2. \quad (6.15)$$

Введем обозначение

$$\frac{n^2}{n - 5 \lg_2 n - 1} + 1 = N_0. \quad (6.16)$$

Из (6.11), (6.12), (6.13), (6.14), (6.15) и (6.16) следует:

$$N_1 \leq n + \frac{2^n}{n^4} N_0 = O\left(\frac{2^n}{n^3}\right), \quad (6.17)$$

$$N_2 \leq 2n^2 \lg_2 n + n \lg_2 n + (n - 3 \lg_2 n + 2) \frac{4 \cdot 2^n}{n^3} + \frac{2 \cdot 2^n}{n^4} N_0 + \frac{4 \cdot 2^n}{n^3} N_0 = \\ = O\left(\frac{2^n}{n^2}\right), \quad (6.18)$$

$$N_3 \leq (n - 5 \lg_2 n) \frac{2^n}{n^5} N_0 + rn + \frac{2^n}{n^4} (2n + 1) N_0 + \frac{4 \cdot 2^n}{n^2} N_0 = O\left(\frac{2^n}{n^2}\right). \quad (6.19)$$

Из (6.10), (6.17), (6.18), (6.19) вытекает

$$L' = O\left(\frac{2^n}{n^2}\right). \quad (6.20)$$

Из (6.8) и 6.2) имеем:

$$L(G) \leq 2^t \left(\frac{2^k}{s} + 1 \right) \left(\frac{2^u}{r} + 1 \right) P(E_0) = \frac{2^{t+k+u}}{rs} (1 + o(1)) P(E_0) = \\ = p(E_0) \frac{2^n}{n} (1 + o(1)), \quad (6.21)$$

так как $t + k + u = n$ и $\frac{P(E_0)}{r} = p(E_0)$.

Очевидно, что

$$L(S) = L' + L(G).$$

Поэтому (см. (6.20) и (6.21))

$$L(S) \leq p(E_0) \frac{2^n}{n} (1 + o(1)).$$

7. ОЦЕНКА СНИЗУ

В работе автора [4] доказана одна теорема о нижних оценках для индексов простоты схем из произвольных элементов. Однако получающаяся из нее в нашем случае оценка недостаточна для доказательства теоремы. Поэтому здесь дано другое доказательство.

Подсчитаем число функций n аргументов x_1, \dots, x_n , реализуемых схемами с индексом простоты, не превосходящим L .

1. Мы будем рассматривать деревья с корнями [17], т. е. деревья [15], в каждом из которых выделена одна вершина — корень.

Лемма 1. Число $S(h)$ деревьев с корнями, имеющих h ребер, удовлетворяет условию*

$$S(h) \leq 4^n$$

Доказательство. Множество деревьев с корнями можно индуктивно определить следующим образом: а) ребро с одной отмеченной вершиной есть дерево с корнем; б) если A_1 и A_2 — деревья (без общих вершин) с корнями a_1 и a_2 соответственно, то результат A отождествления вершин

* Более точная оценка получена в [17] с помощью производящих функций.

a_1 и a_2 есть дерево с корнем $a_1 = a_2$ (см. рис. 9, а); в) если A — дерево с корнем a , то результат A' присоединения к a ребра ab (b не есть вершина в A) есть дерево с корнем b (см. рис. 9, б).

Каждому дереву с корнем можно сопоставить (вообще говоря, неоднозначно) слово над алфавитом $\{\alpha, \beta\}$ следующим образом (в соответствии с индуктивным построением этого дерева): а') ребру шага а) со-

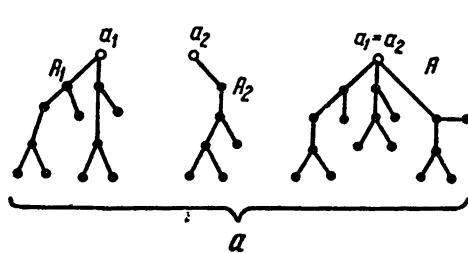


Рис. 9, а

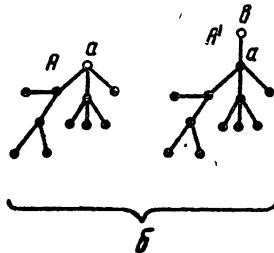


Рис. 9, б

поставляется слово $\alpha\beta$; б') если деревьям A_1 и A_2 шага б) сопоставлены соответственно слова A_1 и A_2 , то дереву A сопоставляется слово A_1A_2 ; в') если дереву A шага в) сопоставлено слово A , то дереву A' сопоставляется слово $\alpha A \beta$.

Например, дереву рис. 10 можно сопоставить слово

$$\underbrace{\alpha \alpha \alpha}_{A_1} \underbrace{\beta \alpha \beta \alpha \beta \alpha \beta \beta}_{A_2} \underbrace{\alpha \beta \alpha \beta \alpha \beta \alpha \beta \alpha \beta \beta}_{A} \underbrace{\alpha \beta}_{A'}$$

В нем выделены подслова A_1 и A_2 , соответствующие поддеревьям A_1 и A_2 .

Заметим, что по слову A , соответствующему дереву A с корнем, последнее восстанавливается однозначно (с точностью до изоморфизма [15], переводящего корень в корень).

Дереву с h ребрами соответствует слово длины 2^h . Поэтому число деревьев с корнями, имеющих h ребер, не превосходит числа слоев длины $2h$ над алфавитом $\{\alpha, \beta\}$, т. е. $2^{2h} = 4^h$. Лемма доказана.

Следствие. Число $S(h, n)$ упорядоченных (т. е. занумерованных) систем n деревьев с корнями (некоторые деревья могут быть пустыми), имеющих в совокупности h ребер, удовлетворяет условию

$$S(h, n) \leq (h + n)^n 4^h.$$

В самом деле, число способов разбиения числа h на n упорядоченных неотрицательных целочисленных слагаемых $h^{(1)}, \dots, h^{(n)}$ $(\sum_{i=1}^n h^{(i)} = h)$ равно числу сочетаний с повторенными из $h+1$ элементов по $n-1$, т. е. $C_{n+h-1}^{n-1} < (n+h)^n$; каждому такому разбиению соответствует $S(h^{(1)}) \cdot S(h^{(2)}) \cdot \dots \cdot S(h^{(n)}) \leq 4^h$ систем деревьев (здесь $S(0) = 1$).

* То есть числу способов расстановки $n-1$ «запятых» перед, после и между знаками h -значного числа; число знаков между соседними «запятыми» равно соответствующему слагаемому; между соседними знаками можно вставлять несколько «запятых», например, разбиению $7=0+0+1+3+2+0+1+0$ соответствует расстановка «запятых» „1,111,11,1..“. Эти расстановки «запятых» являются сочетаниями «пустых мест» перед, после и между знаками h -значного числа с повторениями.

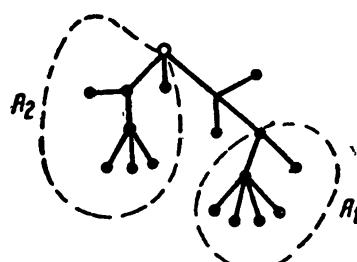


Рис. 10

2. Будем теперь рассматривать ориентированные графы [15], не содержащие ориентированных циклов (т. е. подграфов, состоящих из ребер $\overrightarrow{a_{i_1} a_{i_2}}, (\overrightarrow{a_{i_2} a_{i_3}}), \dots, (\overrightarrow{a_{i_{k-1}} a_{i_k}}), (\overrightarrow{a_{i_k} a_{i_1}})$). Вершины, с каждой из которых инцидентны ребра, ориентированные по направлению к ней (входящие в нее ребра), будем называть *внутренними вершинами* графа; остальные вершины — *входными*. Порядком внутренней вершины назовем число инцидентных с ней направленных к ней ребер.

Пусть граф G имеет h_s внутренних вершин порядка s , $1 \leq s \leq m$, и m есть максимальный из этих порядков. Набор $H = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ будем называть *порядковой структурой* графа, а число $\mu(H) = \frac{\sum s h_s}{\sum h_s}$ — *средним порядком* графа (другими словами, средний порядок есть среднее арифметическое порядков внутренних вершин).

Обозначим через $R(n, H)$ число неизоморфных [15] ориентированных графов без ориентированных циклов с n различимыми (т. е. занумерованными) входными вершинами и порядковой структурой H .

Лемма 2.

$$R(n, H) < 8^{\mu(H)h} (h + n)^{(\mu(H)-1)h+n},$$

где

$$h = \sum h_s.$$

Доказательство. В каждой звезде внутренней вершины произвольного ориентированного графа без ориентированных циклов выделим по одному входящему в нее ребру. Число этих ребер равно h . Их множество образует упорядоченную систему n деревьев с корнями. Поэтому всякий ориентированный граф с порядковой структурой H с n различимыми входными вершинами может быть получен из некоторой упорядоченной системы n деревьев с корнями следующим образом. Вершинам этой системы, отличным от корней, приписываются порядки: порядок s приписывается h_s вершинам (число способов расстановки порядков равно числу способов разбиения числа $h' = \mu(H)h = \sum_{s=1}^m s h_s$ на соответствующее

число упорядоченных натуральных слагаемых, каждое из которых не превосходит m , т. е. это число не превосходит $2^{h'^*}$). Затем каждая вершина порядка s соединяется $s-1$ направленным к ней ребром с некоторыми другими вершинами; число способов соединения каждой вершины не превосходит числа сочетаний с повторениями из $h'+n$ элементов по $s-1$, т. е. $C_{h+n+s-2}^{s-1}$; число способов соединения всех внутренних вершин не превосходит **

$$\prod_{s=1}^m (C_{h+n+s-2}^{s-1})^{h_s} \leq \prod_{s=1}^m (h+n)^{(s-1)h_s} = (h+n)^{h'-h}.$$

Общее число графов порядковой структуры H с n входными вершинами поэтому не превосходит (лемма 1)

$$(h+n)^n \cdot 4^{h'} \cdot 2^{h'-h} \leq 8^{h'} (h+n)^{h'-h+n}.$$

Лемма доказана.

3. Заменим в схемах из функциональных элементов каждый из последних звездой из ребер, ориентированных к центру звезды, в числе, равном числу входов функционального элемента (центр звезды соответствует выходному полюсу функционального элемента, остальные верши-

* Не превосходит числа способов «расстановки запятых» между знаками h' -значного числа (см. сноску на стр. 136) таким образом, что между соседними знаками ставится не более одной «запятой».

** При $h \leq 1$ n всегда не меньше 1.

ны — входным полюсам); после этого припишем центру каждой звезды символ, обозначающий соответствующий ей функциональный элемент, и ее ребрам числа, соответствующие номерам изображаемых ими входов функционального элемента (см. рис. 11). Полученный ориентированный граф в силу определения схемы из функциональных элементов не будет содержать ориентированных циклов. Очевидно, что по полученному графу (с «занумерованными» вершинами и ребрами) первоначальная схема восстанавливается однозначно.

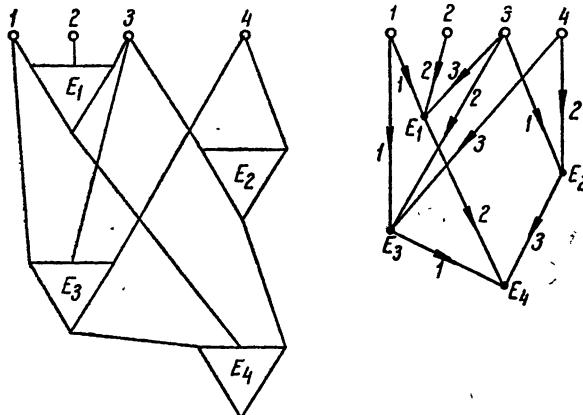


Рис. 11

Индекс простоты полученного графа определим как сумму весов функциональных элементов, символы которых приписаны его вершинам (т. е. его индекс простоты равен индексу простоты исходной схемы).

4. Введем обозначения.

$Q(n, L)$ — число функций алгебры логики n аргументов x_1, \dots, x_n , реализуемых схемами из функциональных элементов над $\{E\}$ с индексом простоты, не большим L . $Q'(n, L)$ — число схем из функциональных элементов над $\{E\}$, индекс простоты которых не превосходит L , реализующих функции алгебры логики n аргументов x_1, \dots, x_n . $Q''(n, L)$ — число ориентированных графов с n различимыми входными вершинами, не содержащих ориентированных циклов, и внутренним вершинам которых приписаны символы функциональных элементов из $\{E\}$, а ребрам приписаны натуральные числа от 1 до m , причем индекс простоты их не превосходит L .

Из сказанного выше следует, что

$$Q(n, L) \leq Q'(n, L) \leq Q''(n, L). \quad (7.1)$$

5. Пусть $\{E\}$ состоит из функциональных элементов E_{ij} , $1 \leq i \leq M_i$, $1 \leq j \leq m$; элемент E_{ij} имеет i входных полюсов и его вес равен P_{ij} .

Обозначим через h_{ij} число элементов E_{ij} в графе G и пусть $h = \sum h_{ij}$. Получим верхние оценки некоторых вспомогательных функций порядковой структуры для графа, имеющего индекс простоты $\rho = \min_{i>2; j=1} \frac{P_{ij}}{i-1}$ (равный $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{M_i} h_{ij} P_{ij}$), не превосходящий L . Обозначим* $\rho = \min_{i>2; j=1} \frac{P_{ij}}{i-1}$

Тогда для любых i и j ($2 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq M_i$) $i-1 \leq \frac{1}{\rho} P_{ij}$. Отсюда

$$(h(H) - 1)h = \sum_{i=2}^m (i-1) \sum_{j=1}^{M_i} h_{ij} \leq \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{M_i} \frac{1}{\rho} h_{ij} P_{ij} \leq \frac{1}{\rho} L. \quad (7.2)$$

* Напомним, что все P_{ij} положительны.

Далее, если $\pi = \min_{i,j} P_{ij}$, то

$$h = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{M_i} h_{ij} \leq \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{M_i} h_{ij} P_{ij} = \frac{1}{\pi} L. \quad (7.3)$$

6. Подсчитаем число $H(L)$ порядковых структур H у графов с индексом простоты, не превосходящим L . Это число не превосходит числа неотрицательных целочисленных решений неравенства

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{M_i} h_{ij} P_{ij} \leq L,$$

которое не превосходит числа решений неравенства

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{M_i} h_{ij} \leq \frac{1}{\pi} L,$$

так как $P_{ij} \geq \pi$. Число решений последнего неравенства не превосходит числа способов разбиения числа $\left[\frac{1}{\pi} L\right]$ на $M+1$ упорядоченных неотрицательных целочисленных слагаемых, где

$$M = \sum_{i=1}^m M_i, \text{ т. е.} *$$

$$C_{\left[\frac{1}{\pi} L\right]+M}^M \leq \left(\frac{1}{\pi} L + M\right)^M.$$

Таким образом,

$$H(L) \leq \left(\frac{1}{\pi} L + M\right)^M. \quad (7.4)$$

7. Очевидно, что

$$Q''(n, L) \leq H(L) \cdot R(n, H) \cdot M^h m^h. \quad (7.5)$$

Из леммы 2, (7.2), (7.3), (7.4) и (7.5) следует, что

$$\begin{aligned} Q''(n, L) &\leq \left(\frac{1}{\pi} L + M\right)^M \cdot 8^{\mu(H)h} (h+n)^{(\mu(H)-1)h+n} (Mm)^h \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{\pi} L + M\right)^M 8^{\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\rho}\right)L} \left(\frac{1}{\pi} L + n\right)^{\frac{1}{\rho}L+n} (Mm)^{\frac{1}{\pi}L}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, исходя из (7.6), что при $L \leq \rho \frac{2^n}{n} (1 - \varepsilon)$ [для любого $\varepsilon > 0$ и $n > n(\varepsilon)$]

$$\frac{Q''(n, L)}{2^{2^n}} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Тем самым, учитывая (7.1), получена нижняя оценка для $L(n)$, асимптотически равная верхней, выведенной в § 6 (так как ρ есть минимум приведенных весов функциональных элементов), и доказана вторая часть теоремы 4.

Теорема 4 полностью доказана.

* См. сноску на стр. 136.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коллектив вычислительной лаборатории Гарвардского университета. Синтез электронных вычислительных и управляющих схем, Пер. с англ., изд-во ИЛ, М., 1954.
2. О. Б. Лупанов. ДАН, 1955, 103, № 4, 561—563.
3. О. Б. Лупанов. ДАН, 1956, 111, № 6, 1171—1174.
4. О. Б. Лупанов. Труды Математического института им. В. А. Стеклова, 1957, т. LI, 158—173.
5. В. М. Остиану. ДАН, 1955, 103, № 5, 827—830.
6. В. М. Остиану. Сборник работ по автоматике и телемеханике, изд-во АН СССР, 1956, 253—267.
7. Г. Н. Поваров. ДАН, 1954, 94, № 6, 1075—1078.
8. Г. Н. Поваров. ДАН, 1955, 100, № 5, 909—912.
9. Г. Н. Поваров. Автоматика и телемеханика, 1957, 18, № 2, 145—162.
10. Б. А. Трахтенброт. ДАН, 1957, 112, № 6, 1005—1007.
11. Б. И. Фиников. ДАН, 1957, 115, № 2, 247—248.
12. С. В. Яблонский УМН, 1957, 12, № 6, 189—196.
13. A. W. Burks, J. B. Wright. Proceedings IRE, 1953, 41, № 10, 1357—1365.
14. E. N. Gilbert. Bell Syst. Tech. Journ., 1951, 30, № 3, 668—688.
15. D. König. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig, 1936
16. D. E. Müller. Transactions IRE, EC-5, 1956, № 1, 15—19.
17. G. Rólyai. Acta Mathematica, 1937, 68, 145—254.
18. J. Riordan, C. E. Shannon. Journ. Math. Phys., 1942, 21, № 2, 83.
19. C. E. Shannon. Transactions AIEE, 1938, 57, 713—722.
20. C. E. Shannon. Bell. Syst. Techn. Journ., 1949, 28, № 1, 59—98.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступила в редакцию
14 апреля 1957 г.