ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIX, № 9 РАДИОФИЗИКА 1986

УДК 532.517.4+533.951

ПРОБЛЕМЫ ВТОРИЧНЫХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ В ГИДРОДИНАМИКЕ И ПЛАЗМЕ

С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев

Рассматриваются закономерности протекания и типы вторичных неустойчивых процессов в гидродинамике и плазме. Приводятся примеры аномального поведения сложных систем с многопараметрической неравновесностью.

1. Вводные замечания. О некоторых аномалиях вторичных неустойчивых процессов. Хорошо известен прогресс в развитии современной теории структур и турбулентности в гидродинамике и других разделах сплошных сред (см., например, [1]). При исследовании таких проблем важную роль играет анализ вторичных неустойчивых процессов, формирующих нелинейный профиль течений, ответственных за перекачку энергии в крупные масштабы и т. д. Со времен Л. Д. Ландау, например, для систем типа сдвиговых течений привычной представляется эволюция, при которой возникают подсистемы, квазиподобные основной системе. Однако этот путь типичен для неустойчивых систем, характеризуемых одним параметром неравновесности и может нарушиться для двухпараметрической неравновесности. Примером такой ситуации является эволюция электронного пучка в неоднородной замагниченной плазме: после развития первичной высокочастотной электронной неустойчивости в системе непосредственно возбуждается вторичный низкочастотный неустойчивый процесс, минуя иерархию промежуточных частот. Иначе говоря, возникает качественно новый тип движения — дрейфовые колебания с возбуждением ионных степеней свободы и турбулентной диффузией плазмы [2, 3]. Подобное аномальное, с точки зрения анализа эволюции простых систем, поведение, вместе с тем, очевидно, типично для задач с многопараметрической неравновесностью. Следует подчеркнуть, что какой бы причудливой не представлялась эволюция системы, она с необходимостью подчиняется закономерности наискорейшей релаксации к максимально возможному в данных условиях равновесному состоянию. С термодинамической точки зрения такая концепция вполне логична.

Другой аномальный и весьма актуальный путь релаксации за счет вторичной неустойчивости — спонтанное нарушение симметрии в системе. Из линейного анализа устойчивости мы отдаем предпочтение модам, обладающим наибольшей скоростью роста. Однако в ряде случаев симметрия задачи такова, что с учетом нелинейных членов в уравнениях движения эволюция системы существенно замедляется в рамках первоначально выбранного из линейного анализа решения и системе «выгодно», спонтанно нарушив исходную симметрию, благодаря вторичной неустойчивости создать условия для более быстрой релаксации. Отсылая за подробностями к [4], отметим, что именно таким образом эволюционирует плазма с незамагниченными ионами при возбуждении турбулентности дрейфовых волн.

Наконец, чрезвычайно интересные явления возникают на пороге устойчивости (или вблизи него) для системы, у которой вторичная неустойчивость спонтанно не возникает. Такое состояние достаточно характерно, например, для районов океана (или атмосферы) с интенсивными течениями, несколькими градиентами параметров среды и др. В результате нелинейной эволюции первичные неустойчивости насыщаются, но фоновые течения, градиенты параметров обычно не исчезают, а лишь видоизменяются настолько, чтобы система попала на порог устойчивости (т. е. в системе остался определенный «запас» неравновесности). Оказывается, что если волновой сигнал конечной амплитуды и определенной структуры попадает в такую среду, то его энергия может существенно возрасти. Следует подчеркнуть, что эффект усиления волновых сигналов возможен на пороге неустойчивостей, не носящих универсального характера в том смысле, что они начинаются не со сколь угодно малого параметра неравновесности. Именно в этом случае у системы еще остается определенный «запас» нерастраченной, неравновесной энергии. Любопытно также заметить, что на пороге устойчивости создаются условия для усиления возмущений с помощью процессов, развивающихся максимально быстро по сравнению с другими аналогичными процессами. Мы начнем рассмотрение с анализа усилительных околопороговых явлений (разд. 2), а затем на примере ряда диссипативных неустойчивостей проиллюстрируем вышеуказанные аномалии (разд. 3).

2. Околопороговые усилительные явления для сдвиговых течений. В последнее время проявляется большой интерес к исследованию резонансных взаимодействий волн «взрывного» характера в стратифицированных сдвиговых течениях с профилем разрывного типа. Высказывается мнение, что такая «взрывная» неустойчивость может объяснить образование турбулентных пятен в океане в присутствии средних стратифицированных течений [5]. Естественно, что наибольший интерес представляют процессы с минимальным временем «взрыва». Возможность существования таких быстрорастущих «взрывных» решений для сдвиговых течений заранее не очевидна. Так, например, в плазменных задачах выясняется стабилизирующая по отношению к «взрывным» процессам роль неоднородности (см., например, [6]). Тем не менее, оказывается, что с участием мод, принадлежащих границе линейной неустойчивости (т. е. неустойчивости волн в линейном приближении), время взрыва существенно сокращается. Прежде всего, рассмотрим движение двух полубесконечных слоев идеальной несжимаемой жидкости различной плотности в поле силы тяжести вдоль горизонтальной границы раздела с различными скоростями в предположении, что плотность жидкости нижнего слоя больше, чем верхнего, а на границе раздела действует поверхностное натяжение. Отсылая за подробностями к [7, 8], кратко рассмотрим схему рассуждений и результаты. Удобно перейти в систему отсчета, в которой $\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2 = 0$ (система Ламба, $\rho_{1,2}$ и $u_{1,2}$ — соответственно плотности и скорости верхнего и нижнего слоев), и нормировать все размерные величины с помощью масштабов длины $l_0 = \sqrt{\dfrac{\sigma}{g(\rho_2-\rho_1)}}$ и времени $t_0 = \sqrt{l_0(\rho_2+\rho_1)/g(\rho_2-\rho_1)}$; здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения; g — ускорение силы тяжести. Дисперсионное соотношение для бесконечно малых периодических возмущений вида $\eta = \varepsilon A \times \exp[i(kx - \omega t) + \text{к. с}]$ (η — смещение границы раздела слоев, x—горизонтальная координата, ε — малый параметр, по порядку величины равный $k\eta$, $A = 0(1)$) в системе Ламба в безразмерных переменных имеет вид

$$D(\omega, k) \equiv (\omega^2/k) - k^2 - 1 + \langle u^2 \rangle / k = 0, \tag{1}$$

где $\langle u^2 \rangle = (\rho_1 u_1^2 + \rho_2 u_2^2) / (\rho_1 + \rho_2)$ — параметр устойчивости течения. Плоскость параметров $(\langle u^2 \rangle, k)$ разбивается на две области — область растущих ($\mathrm{Im}\,\omega \neq 0$, $\mathrm{Re}\,\omega = 0$) и область нейтрально устойчивых ($\mathrm{Im}\,\omega = 0$, $\mathrm{Re}\,\omega \neq 0$) возмущений, разделяющихся пограничной кривой $\langle u^2 \rangle = k + 1/k$ $(\omega = 0)$. Важная особенность пограничных мод заключается в том, что они обладают нулевой энергией (не изменяют энергию системы в квадратичном приближении по амплитуде волны). Это свойство фактически уже следует из (1): групповая скорость для этих мод равна бесконечности (при конечном потоке энергии). С другой стороны, для течения Кельвина — Гельмгольца первый член разложения по амплитуде волн усредненного лагранжиана Уизема пропорционален дисперсионной функции (1),

$$L(\omega, k, A) = \varepsilon^2 A^2 D(\omega, k). \tag{2}$$

Плотность энергии волны дается соотношением

$$H = \omega(\partial L/\partial\omega) - L. \tag{3}$$

Из (3) и (1) немедленно следует, что «пограничные» моды действительно являются волнами нулевой энергии (ВНЭ). Собственно безинерционность (в определенном приближении) мод нулевой энергии является физической причиной их более быстрой релаксации.

Каждому значению $\langle u^2\rangle > 2$ соответствуют две «пограничные» моды с волновыми числами k_1 и k_2, причем при $\langle u^2\rangle = 3\sqrt{2}$ между ними выполняется синхронизм $k_2 = 2k_1$. А поскольку $\omega(k_2) = 2\omega(k_1) = 0$, то между этими двумя модами происходит резонансное взаимодействие. Здесь следует подчеркнуть, что существование резонансного взаимодействия лишь при выделенных изолированных значениях параметра устойчивости течения связано с одномерным характером возмущения. Поэтому целесообразно проанализировать взрывные взаимодействия ВНЭ в стратифицированных сдвиговых течениях в трехмерной геометрии (двумерное взаимодействие в плоскости границы раздела с модовой структурой по вертикальной координате). Укажем на изменения, которые следует произвести в предыдущем рассмотрении. Параметр устойчивости $\langle u^2\rangle$ следует заменить на $\langle u^2\rangle\cos\theta$, где θ — угол между волновым вектором и направлением относительной скорости движения слоев. Для распада ВНЭ с $\theta_0 = 0$ на две волны с $k_1 = k_2$, $\theta_1 = -\theta_2 = \theta$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$ из условий пространственного синхронизма и «пограничности» мод легко получим

$$\langle u^2\rangle^2 = \frac{(4\cos^2\theta - 1)^2}{2\cos^2\theta\,(2 - \cos\theta)\,(2\cos^3\theta - 1)}. \tag{4}$$

Это уравнение для угла θ имеет решение при всех значениях параметра устойчивости течения $\langle u^2\rangle \geqslant 3\sqrt{2}$, причем с ростом $\langle u^2\rangle$ значение угла θ быстро стремится к своему предельному значению $\theta_* \approx 37°$ и остается практически постоянным в широком диапазоне значений $\langle u^2\rangle$. Важной особенностью ВНЭ является повышение порядка по времени дифференциальных уравнений для медленных амплитуд волн подобного типа. Причина этого — обращение в нуль коэффициента при первой производной по времени в вышеупомянутых уравнениях, так как данный коэффициент обратно пропорционален групповой скорости. Укороченные уравнения, описывающие взаимодействие в пространственно-однородном случае, имеют вид

$$\frac{1}{k_0}\frac{d^2A_0}{dt^2} = qA_1A_2, \quad \frac{1}{k_1}\frac{d^2A_1}{dt^2} = qA_0A_2^*, \quad \frac{1}{k_2}\frac{d^2A_2}{dt^2} = qA_0A_1^*, \tag{5}$$

где A_0, A_1, A_2 — амплитуды волновых смещений свободной поверхности,

$$q = (\rho_2 - \rho_1)\langle u^2\rangle k_0^2\left(2\cos^4\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2}\right).$$

При $a_1 = a_2$ уравнения (5) допускают автомодельные решения взрывного типа, при котором амплитуды всех волн растут пропорционально $(t - t_0)^{-2}$. Здесь $t_0 = [6/qk_1A_0]^{1/2}$. Существенно, что время «взрыва» в случае околопороговых взрывов ведет себя обратно пропорционально корню из малого параметра (а не первой степени, как в случае обычных взрывов). Отметим, что резонансное взаимодействие внутренних волн в стратифицированном сдвиговом течении с непрерывным профилем скорости и плотности в случае, когда эти волны являются пограничными модами, имеет те же особенности, что и рассмотренное выше взаимодействие пограничных мод в течении с разрывными профилями скорости и плотности.

Выше мы обсуждали поведение регулярных сигналов конечной амплитуды, взаимодействующих со средой, находящейся на пороге устойчивости. При этом анализировались случаи усиления сигналов в предположении, что развитая турбулентность отсутствует. Как известно (см., например, [9, 10]), турбулентность может быть усилителем крупномасштабных движений. В качестве примера рассмотрим неустойчивость крупномасштабной внутренней волны конечной амплитуды в сдвиговом течении, имеющем слой с параметрами, близкими к порогу генерации турбулентности [7, 9, 11, 12]. Периодическая потеря под действием волны устойчивости этим слоем приводит к появлению существенной переменной составляющей плотности турбулентной энергии b, т. е. переменных коэффициентов турбулентного переноса. Возникают сфазированные с волной турбулентные потоки импульса и плавучести, пропорциональные постоянным градиентам соответствующих величин в невозмущенном потоке, которые в отличие от турбулентной вязкости приводят не к потере энергии волной, а к ее нарастанию за счет энергии исходного течения. С ростом же энергии волны растет и соответствующая переменная составляющая плотности турбулентной энергии. Идея такой турбулентно-волновой неустойчивости (ТВН) впервые сформулирована в [11], но ряд существенных положений такого подхода нуждается в доказательстве и пересмотре, в том числе и предложенное в [11] условие неустойчивости (см., [7, 9, 12]). Кратко изложим схему и результаты аналитического исследования ТВН, следуя [7, 12]. Исходная система — уравнения Эйлера для усредненных по турбулентным пульсациям волновых возмущений в стратифицированном сдвиговом течении несжимаемой жидкости, линеаризованные по амплитуде волны A и дополненные градиентами турбулентных потоков импульса и плавучести. В соответствии с простой полуэмпирической схемой замыкания Колмогорова (см., например, [13]) турбулентные потоки импульса и плавучести представляются в виде произведения градиентов соответствующих величин на коэффициенты турбулентного переноса, пропорциональные турбулентному масштабу l и величине $\sqrt{b}$. Предполагается, что в отсутствие волны локальное число Ричардсона Ri во всем течении больше критического значения $\mathrm{Ri}_{\text{кр}}$, отвечающего порогу генерации турбулентности, и $b\equiv 0$. При этом существует слой $h<z<h+\Delta h$, в котором Ri близко к критическому, и где под действием волнового возмущения может периодически генерироваться турбулентность. В этом слое по порядку малости величин $(\mathrm{Ri}-\mathrm{Ri}_{\text{кр}})/\mathrm{Ri}_{\text{кр}}\sim\sim|A|\sim\sqrt{b}$, что позволяет упростить уравнение для b, оставив в нем лишь члены порядка b. Дальнейший анализ показал, что условие неустойчивости является весьма умеренным: по существу требуется лишь, чтобы характерные длины изменения волнового возмущения вдоль направления стратификации и перпендикулярно ему были сравнимы. Процесс носит пороговый характер и возникает при $A>A_n$, где

$$A_n\approx(\mathrm{Ri}_{\text{кр}}^{-1}\mathrm{Ri}-1)\left[(u'/2\Omega+\Omega/u')kF\right]^{-1}. \tag{6}$$

Здесь $u(z)$ — невозмущенная скорость течения $u'\equiv du/dz$, k — волновое число возмущения в направлении, перпендикулярном стратификации, $\Omega=k(c_{\text{ф}}-u)$ ($c_{\text{ф}}$ — фазовая скорость), $F=(c_{\text{ф}}-u)^{-1}$ Φ — распределение вертикальных смещений в волновой моде (Φ — вертикальный профиль функции тока волновой моды). Характерное время развития неустойчивости $\tau\gtrsim\Omega^{-1}$, но поскольку при исследовании был применен метод медленных амплитуд (влияние турбулентных потоков на волну мало меняет ее амплитуду за время $\sim\Omega^{-1}$), то время развития ТВН не может очень близко приближаться к Ω^{-1}.

3. Вторичные диссипативные неустойчивости. В данном разделе мы кратко напомним о диссипативных вторичных неустойчивостях, среди которых наиболее часто встречаются те особенности, о которых говорилось во Введении. Собственно анализ вторичных неустойчивых процессов в плазме как раз и начался с двухпараметрической неравновесности (см. [1, 2]). Он позволил объяснить целый ряд непонятных экспериментальных результатов, в том числе в пучково-плазменных исследованиях. Хорошо известно, что в неоднородной замагниченной плазме могут возникать опасные низкочастотные неустойчивости, приводящие к аномальным потерям частиц и тепла поперек магнитного поля (см., например, [14]). При этом наиболее опасными оказываются диссипативные неустойчивости — дрейфово-диссипативная [15] и термосильная [16], вызывающие диффузию Бома с коэффициентом диффузии $D_{\max}\sim cT/eH_0$ (c — скорость света, T — температура плазмы, H_0 — напряженность магнитного поля, e — заряд электрона). Бомовская диффузия может развиться в достаточно длинных установках:

$$l_{\parallel} > \frac{l_{\perp}^2}{r_{Hi}} (\omega_{He}/\nu_{ei})^{1/2}, \tag{7}$$

где $l_{\perp}$, $l_{\parallel}$ — поперечные и продольные (вдоль напряженности магнитного поля) размеры установки соответственно, ν_{ei} — частота столкновений электронов с ионами, r_{Hi} — ларморовский радиус ионов. Заметим, что дестабилизирующую роль играют в основном «продольные» диссипативные факторы, в том числе проекция силы трения на направление $\boldsymbol{H}_0$, «продольная» вязкость электронов (последняя, однако, существенна только при пренебрежении кулоновскими соударениями в условиях развития первичных коллективных процессов в электронной подсистеме). Возвращаясь к условию (7), подчеркнем, что, например, для большинства пучково-плазменных экспериментов оно либо не выполняется, либо находится на пределе применимости. То же самое можно сказать и о критерии развития термосильной неустойчивости. С другой стороны, эксперименты, проведенные в плазменно-пучковых разрядах достаточно большой длительности показали, что в системе развиваются дрейфовые неустойчивости, а коэффициент диффузии близок к бомовскому (см., например, [17]). Выход из этого противоречия существует, если учесть, что эффективные частоты соударений электронов в системе плазма — электронный пучок должны быть выше кулоновских за счет развития высокочастотных электронных колебаний, приводящих к некоторой эффективной «вязкости» электронного газа. Отметим, что уже рост такой вязкости инициирует дрейфово-диссипативную неустойчивость, а критерий типа (7) легко выполняется [2]. Понимание роли вторичных неустойчивых процессов в плазменно-пучковых разрядах позволило предложить способ перехода в таких системах от режима нагрева и возбуждения низкочастотных неустойчивостей к режиму эффективного излучения высокочастотных волн из плазмы во внешнее пространство [18]. Этот пример интересен здесь прежде всего как иллюстрация непосредственного высокочастотного инициирования низкочастотных гидродинамических неустойчивостей.

Во Введении уже обращалось внимание на важность вторичных неустойчивых процессов, приводящих к спонтанному нарушению симметрии в системе. Конкретно приводился пример, для которого вторичная неустойчивость «переводила» первоначально одномерный процесс в двумерный. Существуют еще более нетривиальные случаи, например существенное изменение топологических свойств поля скоростей в результате неустойчивости вторичного типа. Так, первоначальная стадия конвективного процесса в атмосфере Земли приводит к генерации ячеек со сравнимыми вертикальным и горизонтальным размерами и с простой топологической структурой — спиральный инвариант для такого поля скоростей равен нулю (т. е. $(v \operatorname{rot} v)=0$). Однако за счет вращения Земли поле турбулентных пульсаций (генерируемое самой конвекцией, либо существующее по каким-то другим причинам) становится гиротропным; иначе говоря, оно имеет ненулевой спиральный инвариант. При учете такой турбулентности в атмосфере Земли может возникнуть вторая стадия конвективного процесса — генерация крупномасштабных структур с горизонтальным масштабом, заметно большим, чем вертикальный, и со сцепленными линиями тока (т. е. топологический инвариант $(\langle v \rangle \operatorname{rot} \langle v \rangle)$ для них отличен от нуля, см. [19]).

В этой статье мы попытались кратко проиллюстрировать, что невзирая на интересующие нас аномалии в нелинейных процессах, «самопроизвольное, не связанное с действием внешних организующих полей регулярное поведение в сложной системе есть результат развития в ней определенного вида неустойчивостей» [20]. При этом особенности в формировании как хаоса, так и структур существенно зависят от своеобразия вторичных неустойчивостей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гапонов А. В., Рабинович М. И. В кн.: Физика XX века — М.: Наука, 1984.
2. Заславский Г. М., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. Доклад на II Всесоюзном съезде механиков. — М.: 1964.
3. Коган Е. Я., Моисеев С. С., Ораевский В. Н. — ПМТФ, 1965, **6**, с. 41.
4. Моисеев С С., Сагдеев Р. З., Тур А. В., Яновский В. В. — ЖЭТФ, 1981, **80**, № 2, с. 597.
5. Миропольский Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане.— М.: Наука, 1981. — 304 с.
6. Давыдова Т. А. Автореферат диссертации. — Харьков, Гос. ун-т, 1982.
7. Моисеев С С., Пунгин В. Г., Суязов Н. В. Доклад на Международном симпозиуме по ламинарно-турбулентному переходу. — Новосибирск, 1984.
8. Гущин В. В., Моисеев С. С., Пунгин В. Г., Ткаченко В. И. — ДАН СССР, 1985, **285**, № 1, с. 65.
9. Моисеев С. С., Пунгин В. Г., Сагдеев Р. З., Суязов Н. В. Тур А. В., Яновский В. В. В кн.: Нелинейные волны. Самоорганизация. — М.: Наука, 1983, с. 85.
10. Рабинович М. И, Сущик М. М. В кн.: Нелинейные волны: Самоорганизация. — М.: Наука, 1983, с 56.
11. Chimonas G. — Boundary-Layer Meteor., 1972, **2**, p. 444.
12. Пунгин В. Г., Суязов Н. В. В кн.: Проблемы нелинейных и турбулентных процессов в физике. Ч. II. — Киев: Наукова думка, 1985, с. 219.
13. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. I. — М: Физматгиз, 1967. — 639 с.
14. Галеев А. А., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. — Атомная энергия, 1963, **15**, с. 451.
15. Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. — ЖЭТФ, 1963, **44**, с. 763.
16. Моисеев С. С. — Письма в ЖЭТФ, 1966, **4**, № 3, с. 81.
17. Bakai A. S., Beresina A. K. et. al. — Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Res., 1971, **11**, p. 113.
18. Корнилов Е. А., Криворученко С. М., Моисеев С. С. — Письма в ЖЭТФ, 1973, **17**, вып. 8, с. 109.
19. Сагдеев Р. З., Моисеев С. С., Руткевич П. Б., Тур А. В., Яновский В. В. Тезисы докладов III Международного симпозиума по тропической метеорологии. — Ялта, 1985, с. 18.
20. Гапонов А. В., Рабинович М. И. Предисловие к книге: Нелинейные волны: Самоорганизация. — М.: Наука, 1983, с. 3.

Институт космических исследований
АН СССР

SECONDARY INSTABILITIES IN HYDRODYNAMICS AND IN PLASMA

S. S. Moiseev, R. Z. Sagdeev

The mechanism and types of secondary unstable processes in hydrodynamics and in plasma are considered. Examples of anomalous behaviour of complex systems with multisymmetric instability are presented.